



OUTILS POUR L'HOMOGENÉISATION DES ONDES ÉLASTIQUES ET ACOUSTIQUES

Philippe Cance

► To cite this version:

Philippe Cance. OUTILS POUR L'HOMOGENÉISATION DES ONDES ÉLASTIQUES ET ACOUSTIQUES. Sciences de la Terre. Université de Nantes, 2014. Français. NNT: . tel-01179418

HAL Id: tel-01179418

<https://hal.science/tel-01179418>

Submitted on 23 Jul 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NANTES
FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR,
GÉOSCIENCES, ARCHITECTURE (SPIGA)

Année 2014

N° attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

OUTILS POUR L'HOMOGENÉISATION DES ONDES ÉLASTIQUES ET ACOUSTIQUES

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Sciences de la Terre et de l'Univers, Espace

Spécialité : Terre solide et couches profondes

*Présentée
et soutenue publiquement par*

Philippe CANCE

Le 28 octobre 2014, devant le jury ci-dessous

Président
Rapporteurs

Examineur

Pr. Antoine MOCQUET
Pr. Geza SERIANI
Pr. Andreas FICHTNER
Pr. Jean-Paul MONTAGNER

Directeur de thèse : Yann CAPDEVILLE

Pour Elle(s)...

OZYMANDIAS of EGYPT

I met a traveller from an antique land
Who said: "Two vast and trunkless legs of stone
Stand in the desert. Near them, on the sand,
Half sunk, a shattered visage lies, whose frown,

And wrinkled lip, and sneer of cold command,
Tell that its sculptor well those passions read,
Which yet survive, stamped on these lifeless things,
The hand that mocked them and the heart that fed,

And on the pedestal these words appear:
'My name is Ozymandias, king of kings:
Look on my works, Ye Mighty, and despair!'

Nothing beside remains. Round the decay
Of that colossal wreck, boundless and bare,
The lone and level sands stretch far away."

P. B. Shelley

REMERCIEMENTS

JE suis usuellement assez peu expansif, mais si je communique peu sur certains sujets, je n'en pense pas moins. Cette section va donc me permettre d'exprimer ma gratitude, parfois restée très intérieure, envers celles et ceux qui ont participé, de près ou de loin, à mon aventure de thèse.

Je voudrais tout d'abord exprimer mes plus profonds remerciements à mon directeur de thèse Yann Capdeville, sans qui rien n'aurait été possible, et qui a su être un guide ouvert, patient, tenace et généreux pour faire entrer un peu de savoir dans ma tête obtuse et pour que finalement j'arrive au bout. Yann, je te l'ai déjà dit, tu es un grand Monsieur, et je ne parle pas que de science !

Je tiens aussi à remercier spécialement Sabrina Carpy, d'abord pour m'avoir fait découvrir le laboratoire de Planétologie et Géodynamique de Nantes ainsi que les exoplanètes (l'océan magmatique de Corot7b restera pour toujours mon océan préféré), mais aussi pour m'avoir donné de très belles expériences d'enseignement à l'Université.

Un grand merci à Marc François, Éric Beucler et Olivier Verhoeven pour les expériences d'enseignement qu'ils m'ont permises ainsi que pour leur bienveillants conseils et nos longues discussions.

Merci à Geza Seriani et Andreas Fichtner de m'avoir fait l'honneur d'être les rapporteurs de ce travail, et à Jean-Paul Montagner et Antoine Mocquet d'avoir accepté de l'examiner.

Merci aussi à Anne Mangeney, d'avoir accepté de surveiller de loin que ce travail se déroule dans de bonnes conditions.

Je tiens ensuite à remercier tous ceux que cette aventure m'a permis de rencontrer et découvrir, en particulier,

- au Laboratoire de Planétologie et Géodynamique de Nantes, merci tout d'abord aux membres du laboratoire qui m'ont accompagné pour les aspects administratifs et techniques, notamment Isabelle Berthaud, Marie-Claire Bréhier, Stéphanie Beaunay et Éric Boeuf.

Je remercie également tous ceux qui, au contraire, m'ont permis de me changer les idées en discutant ou travaillant sur d'autres sujets et qui contribuent activement à la bonne humeur du laboratoire ; ainsi merci à Stéphane LeMouelic, Erwan LeMenn, Olivier Jaffrézic, Carole La, François Civet, Armelle Braud, Pierre Gaudin, Laurent Lenta et Hervé Loyer.

Merci ensuite à ceux qui ont fait ma vie sociale laborantine, c'est-à-dire les doctorants et post-doctorants du laboratoire. Je vais naturellement commencer par mes co-bureaux successifs, Jonathan

Besserer, Benjamin Guillaume, Alice Hazotte et Aurélien Bernard : merci pour l'ambiance studieuse mais décontractée ainsi que pour nos nombreuses discussions et délires. Bon courage à toi Alice, tu seras la prochaine à sortir (en dansant ?) du bureau 26 !

Je pense ensuite à ceux de la "vieille garde", qui ont affronté non sans humour les périls de la recherche ; merci et bravo à Cécile Taffin, Olivia Golle, Patrick Thollot, Thomas "GG" Cornet, Erwin "bip bip" Dehouck, Mélanie Segard, et Mélanie Drilleau.

Je n'oublierai pas non plus ceux de "ma génération" : tout d'abord mon compagnon de galère et opposé capillaire, j'ai nommé Olivier Bollengier. Félicitations, car toi tu as réussi en 3 ans ! Viennent ensuite Joana Oliveira, au caractère bien tranché, Nadia Marounina, lectrice assidue et maîtresse du monde à ses heures perdues, et finalement Thibault Fougeroux, Axel Lefevre et Marine Gourronc, les 3 "pistolets" du laboratoire.

Je remercie enfin le groupe de la "dernière génération" pour leur bonne humeur rafraichissante et leurs discussions endiablées, à savoir, dans le désordre très gaulois qui les caractérise : Alice Hazotte, Boris Chauviré, Ianis Gaudot, Méric Haugmard, Diana Saturnino, Geoffrey Aertgeerts, Clémence Herny, Marion Nachon, Mélanie Douarin, Maiwenn Lothodé, Jassin Petersen, Mathieu Bouffard, et Dorine Bouquet.

Je dédie un grand merci tout spécial à Susan "coach" Conway, pour son énergie, son franc-parler et surtout pour m'avoir découvrir ce sport génial mais totalement contre-nature qu'est le Touch' ! J'en profite pour remercier tous les membres du labo (et assimilés) qui ont alimenté et font toujours vivre notre petit "club" de Touch' laborantin. Par effet de bord, et bien qu'ils n'ont rien à voir avec le laboratoire, j'en profite aussi pour remercier les membres du club des Arrows qui m'ont accueilli les bras ouverts, en particulier Fred, Marine, Ludo et Cécile.

Je tiens enfin à remercier spécialement Klara Kalousova pour nos soirées-concerts, pour m'avoir redonné l'envie de jouer du saxophone (il va me falloir une piqûre de rappel d'ailleurs...), et pour nos nombreuses discussions toujours libres et pourtant si nuancées et empreintes d'humour.

- Il m'a été permis de participer aux trois dernières sessions des QUEST workshop meetings, conférences pendant lesquelles j'ai pu découvrir une bonne partie de la communauté mondiale sismologique. Ils sont trop nombreux pour les remercier tous de leur enthousiasme et de leur savoir, mais je tiens à saluer Paul Cupillard, Stéphanie Durand, Laura Parisi et Cédric Twardzik pour m'avoir aidé à entrer dans la discipline et certaines discussions autour d'une bière. Je tiens de plus à remercier Andrew Valentine pour m'avoir invité à faire un oral lors de la troisième édition du workshop plutôt qu'un poster. Ce fut une première expérience stressante mais intéressante.

Sur une note plus décontractée, je remercie naturellement mes deux

redoutables partenaires d'échecs Amir Khan et Luis Dalguer (il devrait être interdit de sacrifier sa Dame pour faire mat en 2 coups !).

Un grand merci à Carene Larmat, pour sa rafraichissante excentricité mais aussi pour sa grande sensibilité. Je ne serais peut-être pas arrivé au bout sans son intervention.

Enfin, je tiens à remercier particulièrement Céline Hadziioannou : j'ai découvert une semblable par bien des aspects et je me souviendrai toujours de cette soirée "anecdotes", pleine de simplicité et d'humour.

- à l'IMN et pour la gestion du CCIPL (centre de calcul), merci à Jean-Pierre Boulard pour sa réactivité, sa patience et sa bienveillance : je promets de ne plus faire de simulations qui dévorent tout l'espace disque et font planter le système de fichiers parallélisé !

Il me reste ensuite à remercier ceux qui m'ont supporté de l'extérieur et parfois de loin.

Je commencerai par les magiciens, les pirates, les samourais, les sages et les fous, les anges et les démons, bref ceux que je qualifie comme mes amis rôlistes et joueurs de plateaux. Merci à Aurore, Badis, Christophe, Émeline, Fox, Gautier, Hélène, Kévin, Laurent, Pierre-Yves et Xavier de m'avoir fait respirer l'esprit par l'imaginaire ! Je salue au passage les trois jeunes pousses Arthur, Arthur et Carmen !

Je poursuivrai en remerciant d'autres magiciens, à peine plus sages, artistes, philosophes, stratèges et gourmands, cette espèce étrange que j'ai rencontrée grâce à un jeu d'apparence simple mais redoutablement complexe, le go. Ainsi je remercie, Alexandre, Emmanuel, Jean-Christophe, Laetitia, Myriam, Pierre, Sylvain, Véronique et Xavier pour m'avoir sorti de mon quotidien, en particulier lorsque c'était urgent. A ce titre, je tiens de plus à remercier plus spécifiquement Emmanuel Vincent, voyageur intrépide, parfois insolemment chanceux, se riant de beaucoup d'obstacles, intuitif et vigilant. Encore une fois, je salue les plus petits, Achille, Julia et Thomas !

Autour de ce petit système, un nikken tobi plus loin, gravitent aussi Fanfan, Fred, Maël, Mathieu, Tanguy et une troupe de Rennais. Merci aussi à eux pour leur bonne humeur.

Je terminerai ces remerciements goistiques par une bizarrerie frappée au coin de l'absurde : je voudrais remercier le jeu lui-même pour tout l'enseignement (en particulier sur moi-même) que j'ai pu en retirer. A toute personne un peu solitaire et se cherchant un miroir, je préconise le jeu de go.

Je remercie ensuite François, Christina et leurs enfants William, Thomas et Lucas pour leur soutien moral.

Je remercie aussi "papa" Michael Gaudeul, Bérengère Carpentier et leur petite Hannah pour m'avoir régulièrement fait sourire.

Un grand merci enfin, à Gabriel Micard (ainsi qu'à sa tante Josepha), l'une des personnes les plus intelligentes que je connaisse, que je félicite

par ailleurs pour ses récents accomplissements personnels.

Je conclurai en remerciant de tout cœur mon frère Stéphane et mes parents Régine et Claude pour leur soutien sans faille. Vous m'avez toujours soutenu malgré mes sautes d'humeur et mon mauvais caractère, ce qui n'est pas peu dire !

À Nantes, le 4 mars 2015.

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	ix
INTRODUCTION	1
1 PROPAGATION DES ONDES EN MILIEUX HÉTÉROGÈNES	5
1.1 PROPAGATION DES ONDES - GÉNÉRALITÉS	5
1.1.1 Equation des ondes	5
1.1.2 Ondes acoustiques	6
1.1.3 Ondes élastiques	9
1.2 CALCUL DE FORMES D'ONDES PAR ÉLÉMENTS SPECTRAUX . . .	15
1.2.1 Introduction	15
1.2.2 Forme variationnelle	15
1.2.3 Discrétisation en espace	16
1.2.4 Discrétisation en temps	20
1.2.5 Conditions aux limites radiatives	21
1.3 HOMOGÉNÉISATION DES ONDES ÉLASTIQUES	22
1.3.1 Introduction	22
1.3.2 Première approche : milieux stratifiés	24
1.3.3 Homogénéisation déterministe périodique	29
1.3.4 Homogénéisation déterministe non périodique	30
2 APPROXIMATION ACOUSTIQUE DES ONDES ÉLASTIQUES EN MI-	
LIEUX HÉTÉROGÈNES	45
INTRODUCTION	45
2.1 HOMOGÉNÉISATION DES ONDES ACOUSTIQUES	46
2.1.1 Homogénéisation non périodique : adaptation de la	
théorie élastique	46
2.2 VALIDITY OF THE ACOUSTIC APPROXIMATION FOR ELASTIC	
WAVES IN HETEROGENEOUS MEDIA.	57
INTRODUCTION	57
2.2.1 Acoustic approximation of the elastic equations	58
2.2.2 Homogenization for the wave propagation problem . . .	68
CONCLUSION	75
APPENDIX A	77
APPENDIX B	78
APPENDIX C	79
2.3 COMPLÉMENTS	81
2.3.1 Homogénéisation des milieux acoustiques stratifiés . . .	81
2.3.2 Milieu stratifié discret et effet de la densité	82
2.3.3 Milieu stratifié continu	82

2.3.4	Équivalence cinématique bidirectionnelle dans un milieu stratifié discret à 2 couches	84
2.3.5	Validité de l'approximation acoustique et contrastes des hétérogénéités	86
	CONCLUSION	87
	ANNEXE A	88
	ANNEXE B	89
3	VARIATION SPATIALE DE LA LONGUEUR D'ONDE DOMINANTE	91
	INTRODUCTION	91
3.1	FILTRAGE VARIABLE PAR TRANSFORMATION GÉOMÉTRIQUE . .	94
3.1.1	Homogénéisation avec transformation géométrique . . .	94
3.1.2	Transformation ζ et filtrage variable	95
3.1.3	Variabilité 1D : méthode par profil	97
3.1.4	Variabilité 2D	98
3.2	TESTS NUMÉRIQUES	100
3.2.1	Modèle à variabilité 1D	100
3.2.2	Modèle à variabilité 2D	107
	CONCLUSION	109
4	HOMOGENÉISATION RÉSIDUELLE 2D	121
	INTRODUCTION	121
4.1	HOMOGENEISATION RÉSIDUELLE	122
4.1.1	Principe général	122
4.1.2	Construction de la paramétrisation initiale de l'homogénéisation non périodique usuelle	123
4.1.3	Construction du modèle effectif et des correcteurs pour l'homogénéisation résiduelle	125
4.2	OPTIMISATION DE MAILLAGE	127
4.2.1	Introduction	127
4.2.2	Homogénéisation usuelle	128
4.2.3	Homogénéisation résiduelle	130
4.2.4	Comparaison des coûts de calcul	134
4.3	ASSEMBLAGE DE MILIEUX À CONTENUS FRÉQUENTIELS DIFFÉRENTS	136
4.3.1	Introduction	136
4.3.2	Modèle basse résolution	136
4.3.3	Modèle haute résolution	136
4.3.4	Assemblage naïf	138
4.3.5	Assemblage au sens de l'homogénéisation	138
4.3.6	Sismogrammes basses fréquences	139
4.3.7	Sismogrammes hautes fréquences	140
4.3.8	Conclusion	140
	CONCLUSION	142
	CONCLUSION GÉNÉRALE	143
	BIBLIOGRAPHIE	145

INTRODUCTION

Les ondes, et leur propagation, constituent un phénomène physique connu et utilisé dans de nombreux domaines : communications, détection, imagerie, électroménager, ... En sismologie, les ondes sismiques correspondent aux vibrations du sol, et l'exemple typique en est le tremblement de terre. La mesure de ces vibrations du sol, ou sismogramme, constitue l'une des données de base que le sismologue peut exploiter pour comprendre la structure du milieu traversé soit, l'intérieur de la Terre. En effet, les ondes ainsi mesurées contiennent toute l'information sur le milieu que l'onde a traversé entre la source de la vibration et le point de mesure. En d'autres termes, le sismogramme correspond à la réponse du milieu de propagation vu par l'onde pendant son trajet depuis la source. Il n'est donc pas surprenant que ces mesures, alliées à une certaine connaissance préalable de la propagation des ondes sismiques, permettent d'obtenir des informations sur le milieu traversé (prospection, tomographie, etc), les sources sismiques (localisation, amplitude, etc), ...

Un tel processus de reconstruction d'information à partir des observables fait appel à un problème mathématique dit problème inverse. La forme que prend la « connaissance préalable de la propagation des ondes », à laquelle le problème inverse fait systématiquement appel, dépend des données utilisées, ceci allant de simples temps d'arrivée à la forme d'onde complète, et de la stratégie utilisée. Les algorithmes d'inversion étant généralement basés sur un modèle d'essais et erreurs, il s'agit en fait de résoudre, souvent un grand nombre de fois, le problème direct associé, c'est-à-dire reproduire les observables (temps d'arrivée, forme d'onde, etc) en fonction d'une estimation des paramètres de la source d'excitation et du milieu de propagation. Avec le développement croissant des structures et des algorithmes de calcul (puissance de calcul, parallélisation, etc), l'inversion de la forme d'onde complète se développe. Dans ce cas, le problème direct n'est autre que le calcul de toute la forme d'onde.

Le calcul de forme d'onde nécessite une modélisation mathématique précise de la propagation des ondes sismiques qui est régie par la physique des milieux continus. Celle-ci permet de relier le déplacement local du sol à certaines propriétés physiques du milieu de propagation, le *modèle*, et des sources de mouvement au travers d'équations mathématiques dites équations de propagation des ondes. Résoudre mathématiquement ces équations permet alors de définir le champ d'ondes en tout point de l'espace. Pour un milieu de propagation complexe, il n'existe généralement pas de solution analytique aux équations de propagation des ondes et il est nécessaire de faire appel à des solveurs numériques adaptés. Sous réserve que le modèle et les paramètres de la source utilisés dans le calcul décrivent avec une précision suffisante le milieu réel et la source réelle respectivement, ces solveurs fournissent une solution approchant la solu-

tion réelle à une précision définie et contrôlée par la méthode numérique utilisée. Le calcul numérique de ces solutions nécessite généralement des ressources de calcul importantes : mémoire, nombre de processeurs dans les calculateurs parallèles, temps de calcul, ... Pour une configuration matérielle donnée, le temps d'utilisation de ces ressources correspond au *coût calcul*. Pour la plupart des solveurs numériques couramment utilisés en sismologie (différences finies, éléments spectraux, etc), ce coût calcul est essentiellement conditionné par deux échelles :

- l'échelle du modèle, définie par une longueur caractéristique λ_h des variations des paramètres décrivant le milieu de propagation, par exemple la taille de grain des hétérogénéités, et
- l'échelle du champ d'onde, définie par une dimension caractéristique λ_m , la longueur d'onde, des ondes se propageant dans le milieu.

Dans le cas particulier d'un milieu homogène, c'est-à-dire lorsque le modèle est constant sur tout le domaine, seule l'échelle λ_m du champ d'ondes définit le coût calcul : plus les longueurs d'ondes à propager sont petites plus le coût calcul sera important. En principe, il est nécessaire de pouvoir propager toutes les longueurs d'ondes, même les infiniment petites, ce qui conduirait à un coût calcul infini. En pratique, on travaille toujours à bande de fréquence finie pour diverses raisons, notamment : la source présente une fréquence de coin, en particulier dans le champ lointain, les enregistreurs ne couvrent pas toutes les fréquences, ou encore par choix du sismologue. Ceci implique l'existence d'une longueur d'onde minimale λ_{min} pour le champ d'ondes. Le coût calcul est alors défini par cette longueur d'onde minimale $\lambda_m = \lambda_{min}$ proportionnellement à $\lambda_{min}^{-(d+1)}$ où d est la dimension d'espace (2 à 2D, 3 à 3D). Dans le cas d'un milieu hétérogène, c'est-à-dire lorsque le modèle décrivant le milieu varie en fonction de la position, le coût calcul est défini par la plus petite des deux échelles définie précédemment, c'est-à-dire proportionnellement à $\min(\lambda_{min}, \lambda_h)^{-(d+1)}$.

Pour des milieux très hétérogènes, c'est-à-dire lorsque la résolution utile du modèle devient très petite par rapport à la longueur d'onde minimale du champ d'ondes ($\lambda_h \ll \lambda_{min}$), le coût calcul précédemment défini devient élevé. Cependant une telle modélisation ne prend pas en compte une propriété physique importante de la propagation des ondes, à savoir que les ondes de grande longueur d'onde par rapport à la dimension caractéristique des petites hétérogénéités du milieu ne prennent en compte ces hétérogénéités que de manière globale, effective. Pour prendre un exemple, il semble assez intuitif que la propagation d'une vague ($\lambda_m \sim 1\text{ m}$) n'est pas sensible individuellement aux détails définis à l'échelle du grain de sable ($\lambda_h \sim 1\text{ mm}$).

Étant donné un modèle original défini aux petites échelles, accéder au modèle réellement perçu par les ondes revêt alors un double intérêt, physique et numérique. D'une part, un tel modèle permet de mieux comprendre l'effet des petites échelles sur le champ d'onde, c'est-à-dire la physique de la propagation des ondes en milieu très hétérogène. D'autre part, le coût du calcul de forme d'ondes dans ce modèle redevient raisonnable. En effet le modèle perçu par les ondes étant *a priori* défini à l'échelle du champ d'ondes ($\lambda_h^* \sim \lambda_{min}$), le coût calcul associé est défini

par l'échelle du champ d'onde et non celle des hétérogénéités. La construction d'un tel modèle, dit modèle effectif (ou modèle homogénéisé), est au coeur de la problématique des méthodes d'*homogénéisation à deux échelles*.

De manière générale un procédé d'homogénéisation à deux échelles consiste à transformer un problème et sa paramétrisation initiaux définis à une échelle très fine (microscopique) en un problème et une paramétrisation associée effectifs définis à une plus grande échelle (macroscopique). La résolution du problème effectif, *a priori* plus simple ou plus rapide que celle du problème initial, fournit une approximation de la solution réelle pour laquelle l'erreur introduite est contrôlée par la méthode d'homogénéisation utilisée. Par exemple dans le cas de la propagation des ondes sismiques, le problème initial est la résolution de l'équation des ondes, pour lequel le modèle décrivant le milieu de propagation est la paramétrisation initiale.

Initialement, les procédés d'homogénéisation ont été définis pour des problèmes statiques et pour des structures microscopiques périodiques (Bensoussan et al. 1978, Sanchez-Palencia 1980). En effet, la périodicité simplifie le problème théorique d'homogénéisation et permet d'obtenir analytiquement le milieu effectif, ce qui n'est pas le cas pour les structures quelconques. Ceci permet de mieux comprendre la physique des milieux définis aux petites échelles en établissant des liens directs entre paramètres microscopiques et paramètres effectifs. De plus, cela facilite la construction de tests pratiques. Pour des structures microscopiques sans géométrie particulière, le problème théorique d'homogénéisation est plus complexe à traiter. Les procédures pratiques d'homogénéisation exploitent souvent des symétries structurelles particulières ou utilisent des propriétés stochastiques du milieu.

Dans le cas de la propagation des ondes sismiques, les travaux de Backus (1962) constituent une étape majeure de l'homogénéisation des milieux élastiques en traitant le cas stratifié. Pour les milieux à géométrie quelconque, une méthode d'homogénéisation déterministe a été définie par (Capdeville et al. 2010a;b). L'objectif de cette thèse est d'apporter des extensions à cette procédure d'homogénéisation pour les milieux 2D afin de répondre à des problématiques techniques ou physiques ciblées.

Le premier chapitre de cette thèse est consacré à la description des équations de propagation des ondes ainsi que des outils numériques que nous utilisons, c'est-à-dire la méthode des éléments spectraux (Bernardi et Maday 1992, Komatitsch 1997, , ...) en guise de solveur numérique des équations des ondes, et la méthode d'homogénéisation déterministe (Capdeville et al. 2010b, Guillot et al. 2010) des milieux non périodiques à 2D pour la propagation des ondes élastiques.

Au second chapitre, nous développons la méthode d'homogénéisation pour la propagation des ondes acoustiques en suivant le formalisme de celle définie pour la propagation des ondes élastiques (Guillot et al. 2010). Les ondes acoustiques étant parfois utilisées pour approximer les ondes P (ondes de compression) élastiques, nous en étudions la validité dans le cadre des milieux très hétérogènes. Nous comparons alors les résultats obtenus par les procédures d'homogénéisation élastique et acoustique pour expliquer d'un point de vue physique et mathématique les différences observées sur les signaux.

Au troisième chapitre, nous tentons de répondre à une problématique essentiellement technique, celle de l'optimisation du maillage utilisé pour la résolution du problème effectif dans le cadre d'une forte variabilité spatiale de la longueur d'onde minimale du champ d'onde. La méthode d'homogénéisation permet de simplifier la construction du maillage du domaine physique pour la résolution du problème effectif de propagation des ondes. Cependant, la taille des éléments du maillage subit une restriction définie localement par la longueur d'onde minimale locale du champ d'onde. Lorsque cette longueur d'onde minimale locale varie fortement sur le domaine, la restriction de maillage devient sensiblement importante. Cette restriction dépendant aussi de la longueur d'onde de coupure du filtre d'homogénéisation, nous montrons que l'introduction dans la procédure d'homogénéisation d'un filtrage variable avec la position permet de minimiser la restriction de maillage. Nous étudions alors une implémentation d'une telle solution pour des variabilités spatiales 1D et 2D de la longueur d'onde minimale.

Enfin dans le quatrième chapitre nous développons à 2D une technique dont le principe est défini et testé sur les milieux stratifiés (Capdeville et al. 2013), la méthode d'homogénéisation résiduelle. Si l'homogénéisation usuelle permet de calculer le modèle effectif correspondant à un modèle élastique initial, l'homogénéisation résiduelle permet d'homogénéiser la différence entre deux modèles élastiques. La méthode est présentée à 2D et deux exemples d'applications réalistes sont développés, dont les objectifs sont d'ordre technique ou physique.

Cette thèse fait l'objet de plusieurs communications (posters et oraux) et de deux publications (soumises au moment de la finalisation du présent ouvrage).

PROPAGATION DES ONDES EN MILIEUX HÉTÉROGÈNES

1

1.1 PROPAGATION DES ONDES - GÉNÉRALITÉS

1.1.1 Equation des ondes

Une illustration classique de propagation d'ondes est celui de la goutte tombant sur une surface d'eau initialement au repos. Une perturbation quasi verticale de la surface se propage alors depuis le point d'impact. L'onde se propage dans le plan d'eau horizontal mais les particules se déplacent, presque uniquement verticalement (on parle de polarisation verticale). Ainsi la vibration, c'est-à-dire le mouvement des particules physiques, et la direction de propagation des ondes sont deux éléments caractéristiques de l'onde et distincts. De plus on dit qu'une onde est immatérielle, c'est-à-dire que la propagation de l'onde ne s'accompagne d'aucun transport de matière et seule l'énergie est transportée par l'onde.

Pour chaque problème de propagation d'ondes, les lois physiques de conservation de matière, de quantité de mouvement et de moment angulaire fournissent les équations aux dérivées partielles (EDP) décrivant la propagation des ondes concernées. Leur résolution permet d'obtenir le champ d'onde résultant. Pour un problème de propagation scalaire (l'inconnue z est scalaire) et pour une propagation dans un espace de dimension 1, le déplacement des particules z est solution de l'équation scalaire des ondes

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = 0, \quad (1.1)$$

où t représente le temps et c est ici un scalaire correspondant à la vitesse de propagation de l'onde résultante. En présence de sources d'excitation dans le milieu, le second membre de 1.1 est composé d'un ou plusieurs termes sources s . Cette équation aux dérivées d'ordre 2 en espace et en temps, caractéristique de la propagation des ondes, se résout parfois sous forme d'un système d'équations aux dérivées partielles d'ordre 1 en espace et en temps. En dimension supérieure à 1 (2D, 3D) l'équation des ondes d'inconnue vectorielle ¹ \mathbf{u} dans un milieu isotrope, c'est-à-dire un milieu où les ondes se propagent à la même vitesse dans toutes les directions, devient

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \mathbf{u} = 0. \quad (1.2)$$

1. tous les vecteurs et tenseurs seront par la suite dénotés par des symboles en gras

Un tel problème ne peut enfin être résolu qu'en connaissant les conditions aux limites du domaine physique Ω à chaque instant ainsi que les conditions initiales, c'est-à-dire les positions et vitesses en tous points de Ω à l'origine des temps.

Un type d'ondes très particulières dites ondes planes est très utile pour l'étude des problèmes de propagation. En effet la théorie de Fourier précise que toute onde peut se décomposer comme somme d'ondes planes. Une onde plane de pulsation ω et de vecteur d'onde \mathbf{k} s'écrit

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \exp(i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})), \quad (1.3)$$

où i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$. En introduisant cette expression dans 1.2 on obtient la relation de dispersion

$$\omega^2 - c^2|\mathbf{k}|^2 = 0, \quad (1.4)$$

liant la fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$ des ondes à leur longueur d'onde (périodicité spatiale) $\lambda = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}|}$ par la relation

$$\lambda = \frac{c}{f}, \quad (1.5)$$

la norme du vecteur d'onde \mathbf{k} étant alors appelé nombre d'onde.

1.1.2 Ondes acoustiques

Les équations des ondes acoustiques sont les équations d'Euler linéarisées appliquées aux fluides parfaits. Elles sont obtenues à partir des bilans de masse et de quantité de mouvement appliqués au fluide contenu dans un petit volume élémentaire \mathcal{V} , auxquels on adjoint une relation d'état. Les équations ainsi obtenues lient la position des particules et ses dérivées temporelle et spatiales aux propriétés du fluide et des sources éventuelles.

Bilan de masse

En présence d'une source, par exemple un haut parleur, de débit $q(\mathbf{x}_0, t)$ positionnée en \mathbf{x}_0 et variant avec le temps, le bilan de masse sur le volume \mathcal{V} s'écrit

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho_T d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho_T}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_S \rho_T \mathbf{v}_T \cdot \mathbf{n}_e dS = \int_{\mathcal{V}} \rho_T q d\mathcal{V},$$

où $\rho_T(\mathbf{x}, t)$ et $v_T(\mathbf{x}, t)$ représentent respectivement la densité de masse totale et la vitesse du fluide au point \mathbf{x} et à l'instant t , S représente la surface extérieure du volume élémentaire \mathcal{V} et \mathbf{n}_e est la normale extérieure sortante à cette surface. Utilisant le théorème de la divergence, on obtient

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho_T}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_T \mathbf{v}_T) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \rho_T q d\mathcal{V}.$$

Cette relation étant valable pour tout volume élémentaire \mathcal{V} on obtient finalement la relation locale de la conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho_T}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_T \mathbf{v}_T) = \rho_T q.$$

Bilan de quantité de mouvement

Le bilan de quantité de mouvement s'écrit

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho_T \mathbf{v}_T d\mathcal{V} = \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_V,$$

où \mathbf{F}_s représente l'ensemble des forces extérieures de surface (pression, viscosité) et \mathbf{F}_V représente l'ensemble des forces extérieures de volume (pesanteur, électrostatique). Dans la suite nous négligerons les forces extérieures de volume dont nous n'avons en fait pas besoin dans cet travail. Les forces extérieures de surface s'écrivent alors

$$\mathbf{F}_s = \int_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_e dS = \int_S -p_T \mathbf{I} \cdot \mathbf{n}_e dS + \int_S \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_e dS,$$

avec $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ le tenseur des contraintes, $p_T(\mathbf{x}, t)$ la pression, et $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t)$ le tenseur des contraintes visqueuses. La variation de quantité de mouvement correspondant à l'accélération, et utilisant le théorème de la divergence sur chacun des termes constituant \mathbf{F}_s , on obtient finalement

$$\int_{\mathcal{V}} \rho_T \frac{d\mathbf{v}_T}{dt} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \rho_T \frac{\partial \mathbf{v}_T}{\partial t} + \rho_T \mathbf{v}_T : \nabla \mathbf{v}_T d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} -\nabla p_T + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} d\mathcal{V},$$

où la dérivée particulière de la vitesse $\frac{d\mathbf{v}_T}{dt}$ est décomposée en une dérivée temporelle et un terme d'advection. Pour définir le terme d'advection on a introduit le gradient vectoriel $\nabla \mathbf{v}_T = \left(\frac{\partial v_{Ti}}{\partial x_j} \right)_{ij}$, qui n'est autre que l'obtention de la matrice jacobienne, ainsi que le produit tensoriel contracté dénoté par « : ». En utilisant la notation de sommation d'Einstein, pour laquelle on somme sur les indices répétés dans un même terme, on a alors $(\mathbf{v}_T : \nabla \mathbf{v}_T)_i = v_{Tj} \frac{\partial v_{Ti}}{\partial x_j}$. La relation 1.1.2 étant valable pour tout volume élémentaire \mathcal{V} on obtient l'équation locale de conservation de quantité de mouvement (équation de Navier-Stokes) :

$$\rho_T \frac{d\mathbf{v}_T}{dt} = \rho_T \frac{\partial \mathbf{v}_T}{\partial t} + \rho_T \mathbf{v}_T : \nabla \mathbf{v}_T = -\nabla p_T + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$$

Hypothèses de l'acoustique linéaire

Les équations locales issues des bilans de masse et de quantité de mouvement régissent l'écoulement d'un fluide. Pour obtenir les équations de l'acoustique on utilise ces équations sous les hypothèses dites de l'acoustique linéaire :

- on étudie la propagation des perturbations (ρ, p, \mathbf{v}) des grandeurs définies précédemment, définie par rapport à des valeurs de référence,

$$\rho_T = \rho_0 + \rho, \quad (1.6)$$

$$p_T = p_0 + p, \quad (1.7)$$

$$\mathbf{v}_T = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}, \quad (1.8)$$

où les grandeurs indicées par un zéro sont invariantes dans le temps et correspondent à un état d'équilibre ;

- ces perturbations sont de faible amplitude, c'est-à-dire que pour toute perturbation précédente notée génériquement par g on a $g \ll g_0$;
- le fluide est parfait ce qui signifie que les contraintes visqueuses sont négligeables, soit $\tau = 0$;
- même s'il est possible de considérer un flot moyen non nul (on parle alors d'aéro-acoustique) on considère que le fluide est au repos, soit $\mathbf{v}_0 = 0$.

On dérive alors des relations précédentes les équations de l'acoustique portant sur les quantités perturbées en négligeant les variations d'ordre supérieur ou égal à 2 pour ces quantités. La conservation de la masse devient

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}) = \rho_0 q,$$

et la conservation de la quantité de mouvement devient

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla (p_0 + p).$$

En supposant le milieu suffisamment homogène on obtient finalement

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot (\mathbf{v}) = \rho_0 q \quad \text{et} \quad (1.9)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p \quad (1.10)$$

Relation d'état

En trois dimensions, le système de 4 équations scalaires (1.9,1.10) relie les 5 quantités (ρ, p, \mathbf{v}) inconnues. Il est donc nécessaire d'ajouter une dernière relation pour fermer le problème, une relation d'état. La propagation des ondes acoustiques étant un phénomène assez rapide il est possible de considérer qu'il est soit isotherme, soit isentropique, c'est-à-dire que le déplacement des particules lors de la propagation des ondes ne modifie pas la température du milieu ou ne génère pas d'échanges de chaleur respectivement. En considérant un fluide parfait isentropique on a alors

$$p_T V_T^\gamma = P_0 V_0^\gamma, \quad (1.11)$$

ou encore

$$\frac{p_T}{\rho_T^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma}, \quad (1.12)$$

avec V_T le volume de fluide considéré et γ la constante caractéristique des gaz parfaits. Pour les perturbations il vient donc au premier ordre que

$$p = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \rho = V_P^2 \rho, \quad (1.13)$$

où V_P a la dimension d'une vitesse et correspond à la vitesse des ondes acoustiques dans le milieu.

Equations des ondes acoustiques

En introduisant la relation d'état 1.13, dans les équations 1.9 et 1.10 on obtient un système d'équations en vitesse-pression correspondant aux équations des ondes acoustiques définies sur un domaine Ω , soit

$$\frac{1}{\kappa} \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}) = q \quad \text{et} \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p, \quad (1.15)$$

avec $\kappa = \rho_0 V_p^2$. Ce système d'équations aux dérivées partielles d'ordre 1 peut se réécrire en une seule équation aux dérivées partielles d'ordre 2 en dérivant 1.14 par rapport au temps et en prenant la divergence de 1.15 :

$$\frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} \nabla p \right) = \frac{\partial q}{\partial t}, \quad (1.16)$$

soit, dans un milieu homogène

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - V_p^2 \Delta p = \kappa \frac{\partial q}{\partial t}, \quad (1.17)$$

qui est une version pluridimensionnelle de l'équation d'ondes 1.1.

Conditions initiales - conditions aux limites

Pour la résolution effective des équations de l'acoustique, il faut ajouter des conditions initiales $(\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0), p(\mathbf{x}, 0))$ en vitesse et pression acoustiques (généralement prises au repos : $\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = 0$ et $p(\mathbf{x}, 0) = 0$), ainsi que des conditions aux limites, c'est-à-dire des conditions appliquées aux frontières $\partial\Omega$ du domaine Ω . Il existe essentiellement deux types de conditions aux limites :

pression imposée, $p_{\partial\Omega} = p_D$. Il s'agit d'une condition de type Dirichlet dont le cas homogène ($p_{\partial\Omega} = 0$) correspond à une ouverture à l'air libre (pression ambiante).

vitesse imposée, généralement nulle, $\mathbf{v}_{\partial\Omega} = \mathbf{v}_N = 0$. Il s'agit d'une condition de type Neumann (de par la relation 1.15) correspondant à la présence d'une paroi rigide.

où $\partial\Omega$ désigne ici tout ou partie de la frontière du domaine Ω .

Il est rare de devoir résoudre numériquement ces équations pour un domaine Ω infini. Dans un tel cas, il est nécessaire de faire appel à des techniques introduisant des limites finies virtuelles au domaine avec des conditions aux limites simulant un domaine infini. Un tel exemple sera abordé à la section 1.2.5.

1.1.3 Ondes élastiques

Bilans masse-qdm-moment : Equations d'ondes

Pour la propagation des ondes dans les solides, on utilise une hypothèse de conservation de la masse

$$\frac{dM}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_e dS = 0, \quad (1.18)$$

avec ρ la densité de masse et \mathbf{v} le vecteur vitesse des particules. Utilisant le théorème de la divergence, on obtient la relation locale de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (1.19)$$

La conservation de la quantité de mouvement \mathbf{P} s'écrit quant à elle,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_V, \quad (1.20)$$

où $\mathbf{F}_V = \int_V \mathbf{f} dV$ est le vecteur des forces de volume (sources), et \mathbf{F}_s représente les forces de traction sur la frontière de l'élément de volume considéré, soit

$$\mathbf{F}_s = \int_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_e dS = \int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}) dV, \quad (1.21)$$

avec $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes et \mathbf{n}_e la normale extérieure sortante. Ayant enfin pour chaque composante d'espace indiquée par i

$$\frac{dP_i}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} dV + \int_S \rho v_i \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_e dS = \int_V \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v}_i \rho \mathbf{v} dV, \quad (1.22)$$

on obtient finalement la relation de conservation locale de la quantité de mouvement pour chaque composante d'espace i

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}_i \rho \mathbf{v}) = \mathbf{f}_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}. \quad (1.23)$$

En développant les dérivées partielles du membre de gauche, on obtient

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla v_i + v_i (\rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})) = \mathbf{f}_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (1.24)$$

Finalement, en utilisant la relation de conservation de la masse et sous l'hypothèse des petites déformations justifiant que l'on néglige le terme d'advection d'ordre 2, on obtient

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}, \quad (1.25)$$

que l'on peut écrire à l'aide du vecteur déplacement \mathbf{u}

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}. \quad (1.26)$$

On peut montrer (Germain et Muller 1994), et nous admettrons ici, que la loi de conservation du moment angulaire assure la symétrie du tenseur des contraintes : $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, $\forall i, j$.

Loi de Hooke

Pour résoudre le système d'équations 1.26 on doit ajouter une loi de comportement reliant le tenseur des contraintes σ au déplacement \mathbf{u} , ceci définissant la rhéologie du matériau dans lequel les ondes se propagent. Physiquement, il est plus aisé de concevoir une relation entre les contraintes imposées au milieu et la déformation induite plutôt qu'au déplacement lui-même. Par une étude géométrique, on définit alors le tenseur des déformations ϵ comme

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial \mathbf{x}_i} + \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{x}_j} + \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial \mathbf{x}_i} \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial \mathbf{x}_j} \right), \quad (1.27)$$

qui est alors un tenseur d'ordre 2 symétrique par construction. Dans le cas de la propagation des ondes on se place généralement dans le cadre de petites déformations ce qui permet, comme nous le ferons toujours par la suite, d'approximer le tenseur des déformations par sa partie linéaire en \mathbf{u} , soit

$$\epsilon_{ij} \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial \mathbf{x}_i} + \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{x}_j} \right). \quad (1.28)$$

Parmi les différents modèles de rhéologie possibles (élastique, viscoélastique, plastique, ...) nous nous intéressons ici au modèle élastique liant le tenseur des contraintes σ au tenseur des déformations ϵ par la relation

$$\sigma_{ij} = \sigma_{0,ij} + \mathbf{C}_{ijkl} \epsilon_{kl} + \mathbf{D}_{ijklmn} \epsilon_{kl} \epsilon_{mn} + \dots, \quad (1.29)$$

où σ_0 désigne le tenseur de précontrainte décrivant l'état du solide au repos et \mathbf{C} et \mathbf{D} sont des tenseurs élastiques. Plus particulièrement, nous nous intéresserons au modèle élastique linéaire sans précontrainte (au repos) dite loi de Hooke

$$\sigma = \mathbf{C} : \epsilon, \quad (1.30)$$

en utilisant ici le produit tensoriel doublement contracté $\mathbf{C} : \epsilon = \mathbf{C}_{ijkl} \epsilon_{kl}$.

On obtient ainsi le système d'équations des ondes élastiques définies sur le domaine Ω et d'inconnue le vecteur déplacement \mathbf{u}

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} - \nabla \cdot \sigma = \mathbf{f}, \quad (1.31)$$

$$\sigma = \mathbf{C} : \epsilon, \quad (1.32)$$

$$\epsilon = \frac{\nabla \mathbf{u} + {}^T \nabla \mathbf{u}}{2}, \quad (1.33)$$

avec les notations $\dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{v}$ et $\ddot{\mathbf{u}} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$ que l'on conservera par la suite.

Conditions initiales - conditions aux limites

Pour que le problème soit bien posé, c'est-à-dire pour qu'il y ait unicité de la solution, il faut adjoindre des conditions initiales et des conditions aux limites à ces équations. Le système sera généralement considéré initialement au repos, soit $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t=0) = 0$ et $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t=0) = 0$. Il existe essentiellement deux types de conditions aux limites :

- Position (ou vitesse) imposée, soit $\mathbf{u}_{\partial\Omega} = \mathbf{u}_D$. Il s'agit d'une condition de type Dirichlet.
- Traction nulle, soit $\sigma : N_{\partial\Omega} = 0$. Il s'agit d'une condition de type Neumann correspondant à une frontière libre (par exemple la surface terrestre).

Description des milieux

Les paramètres du milieu nécessaires à la résolution d'un tel système sont alors la densité de masse ρ , que nous désignerons par la suite par le simple terme de densité, et le tenseur des rigidités élastiques, ou plus simplement tenseur élastique, d'ordre 4 \mathbf{C} .

En raison de la symétrie des tenseurs des déformations et des contraintes, le tenseur élastique possède deux symétries intrinsèques dites petites symétries

$$\mathbf{C}_{ijkl} = \mathbf{C}_{jikl} = \mathbf{C}_{ijlk}. \quad (1.34)$$

Par un argument thermodynamique sur l'énergie du système le tenseur élastique est aussi doté d'une troisième symétrie intrinsèque dite grande symétrie

$$\mathbf{C}_{ijkl} = \mathbf{C}_{klij}. \quad (1.35)$$

En trois dimensions, ces symétries réduisent le nombre de coefficients indépendants initialement de $3^4 = 81$ à seulement 21 (matériau triclinique).

Ces symétries permettent de plus de contracter les indices par paires (notations de Voigt) en utilisant la correspondance : $11 \rightarrow 1, 22 \rightarrow 2, 33 \rightarrow 3, 23 \rightarrow 4, 31 \rightarrow 5, 12 \rightarrow 6$ à 3D et $11 \rightarrow 1, 22 \rightarrow 2, 12 \rightarrow 3$ à 2D. Il est alors possible de construire une base de tenseurs (Bekhterev 1926, François 1995, Cowin et Mehrabadi 1987) utilisant cette contraction d'indices afin de réduire le nombre de composantes à considérer. Dans cette base, le tenseur élastique s'écrit comme une matrice symétrique 6×6 à 3D (3×3 à 2D), les tenseurs de déformation ϵ et de contrainte σ comme des vecteurs notés $\hat{\epsilon}$ et $\hat{\sigma}$ respectivement, et l'on a $\hat{\sigma}_I = \mathbf{C}_{IJ}\hat{\epsilon}_J$, soit

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{31} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{1111} & \mathbf{C}_{1122} & \mathbf{C}_{1133} & \sqrt{2}\mathbf{C}_{1123} & \sqrt{2}\mathbf{C}_{1131} & \sqrt{2}\mathbf{C}_{1112} \\ & \mathbf{C}_{2222} & \mathbf{C}_{2233} & \sqrt{2}\mathbf{C}_{2223} & \sqrt{2}\mathbf{C}_{2231} & \sqrt{2}\mathbf{C}_{2212} \\ & & \mathbf{C}_{3333} & \sqrt{2}\mathbf{C}_{3323} & \sqrt{2}\mathbf{C}_{3331} & \sqrt{2}\mathbf{C}_{3312} \\ & & & 2\mathbf{C}_{2323} & 2\mathbf{C}_{2331} & 2\mathbf{C}_{2312} \\ & & & & 2\mathbf{C}_{3131} & 2\mathbf{C}_{3112} \\ & & & & & 2\mathbf{C}_{1212} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \sqrt{2}\epsilon_{23} \\ \sqrt{2}\epsilon_{31} \\ \sqrt{2}\epsilon_{12} \end{pmatrix},$$

où seule la diagonale supérieure du tenseur élastique symétrique \mathbf{C}_{IJ} est ici explicitée et où les facteurs constants $\sqrt{2}$ et 2 interviennent ici pour conserver l'algèbre tensorielle (ici matricielle) sur les nouveaux éléments \mathbf{C}_{IJ} , $\hat{\sigma}$ et $\hat{\epsilon}$. De plus, les normes des tenseurs sont conservées : $\|\epsilon\| = \|\hat{\epsilon}\|$, $\|\sigma\| = \|\hat{\sigma}\|$.

La structure du matériau (réseau cristallin) peut ensuite augmenter le nombre de symétries du tenseur élastique. Il y a six symétries possibles, triées par ordre croissant d'ordre de symétrie : triclinique, monoclinique,

orthorhombique, tetragonale, transverse isotrope (ou encore hexagonale), et isotrope.

Nous ne nous intéresserons principalement qu'aux deux dernières, celles-ci permettant entre autre une approximation à 2D.

Le tenseur élastique est de plus naturellement défini positif (α -elliptique)

$$\exists \alpha > 0 / \forall \phi \neq 0, \quad \phi : \mathbf{C} : \phi > \alpha \phi : \phi.$$

Source

Le terme source est généralement décrit par

$$\mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{M},$$

où \mathbf{M} est un tenseur symétrique appelé moment sismique. Dans la suite, nous considérerons toujours la source comme une explosion ponctuelle

$$\mathbf{f} = g(t - t_0) \nabla (\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)),$$

où \mathbf{x}_0 désigne la localisation de la source, δ est la distribution de Dirac et g est un Ricker (dérivée seconde de Gaussienne en temps).

Ondes de volume

Dans le cas où les paramètres élastiques sont homogènes, c'est-à-dire lorsqu'ils ne varient pas spatialement, et isotropes, c'est-à-dire que le matériau se comporte de manière identique quelle que soit la direction d'application d'une contrainte, alors la densité est constante et le tenseur élastique se paramétrise par seulement deux paramètres indépendants, par exemple les coefficients de Lamé λ et μ

$$\mathbf{C}_{IJ} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2\mu & 0 & 0 \\ & & & & 2\mu & 0 \\ & & & & & 2\mu \end{bmatrix}.$$

L'équation des ondes élastiques se réduit alors à

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} - \nabla \cdot (\lambda (\text{tr}(\epsilon)) \mathbf{I} + 2\mu \epsilon) = \mathbf{f} \quad \text{et} \quad (1.36)$$

$$\epsilon = \frac{\nabla \mathbf{u} + {}^T \nabla \mathbf{u}}{2}, \quad (1.37)$$

où \mathbf{I} est le tenseur identité et $\text{tr} : \mathbf{A} \rightarrow (\mathbf{A}) = \mathbf{A}_{ii}$ est l'opérateur de trace. Avec $\text{tr}(\epsilon) = \nabla \cdot (\mathbf{u})$, on en déduit que

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} - \lambda \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu \Delta \mathbf{u} - \mu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{f}, \quad (1.38)$$

puis

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} - (\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (1.39)$$

grâce à la propriété des opérateurs $\Delta \mathbf{v} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v})$, avec $\nabla \times \mathbf{v}$ désignant le rotationnel du vecteur \mathbf{v} . Ceci amène à considérer les ondes à rotationnel nul et celles à divergence nulle.

Pour les ondes à rotationnel nul, il est possible de considérer que le champ de déplacement dérive d'un potentiel $u = \nabla q$ ou bien, ρ étant ici constant $u = \frac{1}{\rho} \nabla q$ et l'équation des ondes 1.39 devient

$$\nabla \ddot{q} - (\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{f}, \quad (1.40)$$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \nabla q. \quad (1.41)$$

En supposant que la source dérive elle aussi d'un potentiel $\mathbf{f} = \nabla g$, on a finalement

$$\ddot{q} - (\lambda + 2\mu) \nabla \cdot \mathbf{u} = g \quad \text{et} \quad (1.42)$$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \nabla q, \quad (1.43)$$

c'est-à-dire l'équation des ondes acoustiques. Il s'agit alors d'ondes de compression, la polarisation de ces ondes étant la même que leur direction de propagation, appelées ondes P (premières) et de vitesse $V_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$.

Pour les ondes à divergence nulle, l'équation 1.38 donne

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} - \mu \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (1.44)$$

Il s'agit d'ondes de cisaillement, leur polarisation étant orthogonale à leur direction de propagation, dites ondes S (secondes), de vitesse $V_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} < V_P$. Dans un milieu fluide, il n'y a pas d'ondes de cisaillement, soit $\mu = 0$.

Dans le cas d'un milieu non homogène ou anisotrope, on admet que des ondes quasi-P et quasi-S se propagent.

Ondes de surface

Il est rare de considérer la propagation des ondes en un milieu infini. Lorsqu'il existe des interfaces, comme la surface terrestre ou des réflecteurs en profondeur comme le Moho, les ondes de volume décrites précédemment sont susceptibles d'être réfléchies, transmises et réfractées et ce potentiellement avec des conversions entre ondes P et ondes S. Cependant, d'autres ondes doivent alors être prises en considération. Dans le cas d'une surface libre (condition de traction nulle), Lord Rayleigh (Rayleigh 1887) montra l'existence d'ondes évanescentes avec la profondeur donc dont la propagation reste localisée sur une faible épaisseur sous la surface. De telles ondes dites de surface, et appelées en l'occurrence ondes de Rayleigh, s'avèrent dispersives lorsque le milieu en proximité de la surface est anisotrope ou hétérogène. Dans le cas d'une interface entre deux matériaux élastiques, d'autres ondes de surface peuvent exister (ondes de Love et ondes de Stoneley). Ces ondes de surface sont généralement plus lentes que les ondes de volume et sont de plus courtes longueurs d'onde.

1.2 CALCUL DE FORMES D'ONDES PAR ÉLÉMENTS SPECTRAUX

1.2.1 Introduction

Nous ne connaissons généralement pas de solutions analytiques aux équations des ondes pour un modèle donné, il est donc nécessaire de recourir à des solutions numériques. De nombreuses méthodes numériques de résolution des équations des ondes (élastiques ou acoustiques) ont été développées. Les plus utilisées aujourd'hui sont des méthodes de différences finies et des méthodes de Galerkin à éléments discontinus ou à éléments spectraux. Dans ce travail, nous avons utilisé la méthode des éléments spectraux qui est une méthode à éléments finis de haut degré, initialement introduite pour la mécanique des fluides (Patera 1984, Bernardi et Maday 1992), et qui a ensuite été adaptée et appliquée à la propagation dans les milieux continus initialement par D. Komatitsch (Komatitsch 1997, Komatitsch et Vilotte 1998, Komatitsch et Tromp 1999). Il s'agit aujourd'hui d'une des méthodes les plus précises pour le calcul de formes d'ondes.

1.2.2 Forme variationnelle

En tant que méthode par éléments finis, la méthode des éléments spectraux s'appuie sur la formulation variationnelle (ou forme faible) du problème de propagation des ondes. En considérant un domaine physique ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de dimension d et de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ et un intervalle de temps $I = [0, T]$ sur lesquels on veut calculer le champ d'ondes, une forme forte généralisée du problème de propagation des ondes s'écrit

$$\alpha \ddot{\mathbf{u}} - \nabla \cdot (\Theta : \nabla(\mathbf{u})) = \mathbf{f}, \quad (1.45)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad (1.46)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \quad (1.47)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}|_{\Gamma_D}(\mathbf{x}), \text{ sur } \Gamma_D = \partial\Omega_D, \quad (1.48)$$

$$\Theta : \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \tau|_{\Gamma_N}(\mathbf{x}), \text{ sur } \Gamma_N = \partial\Omega_N, \quad (1.49)$$

d'inconnue la quantité $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ de dimension k , dont le modèle géologique est décrit par α et Θ , et de source \mathbf{f} . Dans le cas élastique, \mathbf{u} est le vecteur déplacement ($k = d$), $\alpha = \rho$ est la densité et $\Theta = \mathbf{c}$ est le tenseur élastique. Dans le cas acoustique, $\mathbf{u} = q$ est le potentiel scalaire ($k = 1$), $\alpha = \frac{1}{\kappa}$ est la compressibilité isentropique et $\Theta = \frac{1}{\rho} \mathbf{I}$ est l'inverse de la densité. Γ_D et Γ_N représentent les portions de frontière du domaine sur lesquelles on applique respectivement une condition de Dirichlet et de Neumann. On a $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$. $\tau(\mathbf{x})$ représente alors la traction sur cette frontière.

Pour obtenir la formulation variationnelle, on commence par définir les ensembles \mathcal{U}_t des champs admissibles à un instant $t \in I$ et \mathcal{W} des

variations admissibles

$$\mathcal{U}_t = \{u(\mathbf{x}, t) \in (H^1(\Omega))^k, u(\mathbf{x}, t) = u|_{\Gamma_D}(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \Gamma_D\}, \forall t \in I, \quad (1.50)$$

$$\mathcal{W} = \{v(\mathbf{x}) \in (H^1(\Omega))^k, v(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x} \in \Gamma_D\}, \quad (1.51)$$

où $H^1(\Omega)$ est l'espace fonctionnel de Sobolev des fonctions de carré intégrable sur Ω dont les dérivées premières en espace sont aussi de carré intégrable sur Ω . La formulation faible s'obtient en testant, au sens du produit scalaire défini sur $(\mathcal{L}^2(\Omega))^k$, la formulation forte contre une variation admissible quelconque \mathbf{w} , en rééquilibrant les degrés de dérivation en espace par la formule de Green, soit $\forall t \in I$, trouver $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{U}_t$, $\forall \mathbf{w} \in \mathcal{W}$ tel que

$$m(\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = (\mathbf{f}, \mathbf{w}) + \langle \tau_{|\Gamma_N}, \mathbf{w} \rangle, \quad (1.52)$$

$$(\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0), \mathbf{w}) = (\mathbf{u}_0, \mathbf{w}), \quad (1.53)$$

$$(\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0), \mathbf{w}) = (\mathbf{v}_0, \mathbf{w}), \quad (1.54)$$

avec

$$\begin{aligned} m(\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}) &= \int_{\Omega} \alpha \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{w} dV, \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w} : \Theta : \nabla \mathbf{u} dV, \\ (\mathbf{h}, \mathbf{g}) &= \int_{\Omega} \mathbf{h} \cdot \mathbf{g} dV, \quad \forall \mathbf{h}, \mathbf{g} \in (\mathcal{L}^2(\Omega))^k, \quad \langle \tau_{|\Gamma_N}, \mathbf{w} \rangle = \int_{\partial\Omega} \tau_{|\Gamma_N} \cdot \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_e dS. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Dans le cas de la propagation d'ondes élastiques, il est à noter que la condition de Neumann (condition en traction) est automatiquement prise en compte ici par la présence du dernier terme intégral dans 1.52. Dans le cas d'une surface libre (traction nulle), ce terme disparaît et la condition de Neumann est prise en compte de façon naturelle. Nous intéressent à la propagation d'ondes acoustiques dans la Terre, nous ne considérerons pas de conditions de Neumann (vitesse nulle correspondant à une paroi rigide) même si celle-ci serait cependant prise en compte naturellement, de la même manière que pour le cas élastique c'est-à-dire par annulation de l'intégrale concernée. En revanche, toute surface libre imposera une condition de Dirichlet sur cette partie de la frontière du domaine.

Enfin, il est possible, et nécessaire avant de résoudre, de démontrer que formulation forte et formulation faible sont équivalentes.

1.2.3 Discrétisation en espace

La méthode des éléments finis consiste à approximer les espaces fonctionnels \mathcal{U}_t et \mathcal{W} par des sous-espaces de dimension finie $\mathcal{U}_t^h \subset \mathcal{U}_t$ et $\mathcal{W}^h \subset \mathcal{W}$ respectivement. La formulation variationnelle devient discrète, ce qui s'écrit $\forall t \in I$, trouver $\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{U}_t^h$, $\forall \mathbf{w}^h \in \mathcal{W}^h$ tel que

$$m(\ddot{\mathbf{u}}^h, \mathbf{w}^h) + a(\mathbf{u}^h, \mathbf{w}^h) = (\mathbf{f}, \mathbf{w}^h) + \langle \tau_{|\Gamma_N}, \mathbf{w}^h \rangle, \quad (1.57)$$

$$(\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, 0), \mathbf{w}^h) = (\mathbf{u}_0, \mathbf{w}^h), \quad (1.58)$$

$$(\dot{\mathbf{u}}^h(\mathbf{x}, 0), \mathbf{w}^h) = (\mathbf{v}_0, \mathbf{w}^h). \quad (1.59)$$

En notant $(\psi_i)_{1 \leq i \leq \dim(\mathcal{W}^h)}$, une base \mathcal{W}^h , $(\phi_j)_{1 \leq j \leq \dim(\mathcal{U}_t^h)}$ une base de \mathcal{U}_t^h et $U(t) = (u_i(t))_{1 \leq i \leq \dim(\mathcal{U}_t^h)}$, le vecteur décrivant \mathbf{u}^h dans cette base et en utilisant successivement tous les éléments de la base de \mathcal{W}^h , la formulation variationnelle discrète (1.57, 1.58, 1.59) devient un système d'équations différentielles ordinaires en temps soit $\forall t \in I$, trouver U tel que

$$M.\ddot{U} + A.U = F_{int} + F_{ext} \quad \text{et} \quad (1.60)$$

$$U(t=0) = U_0, \quad \dot{U}(t=0) = V_0, \quad (1.61)$$

avec :

$$M_{ij} = m(\phi_j, \psi_i) = \int_{\Omega} \alpha \phi_j \cdot \psi_i dV, \quad (1.62)$$

$$A_{ij} = a(\phi_j, \psi_i) = \int_{\Omega} \nabla \psi_i : \Theta : \nabla \phi_j dV, \quad (1.63)$$

$$F_{int,i} = (\mathbf{f}, \psi_i), \quad (1.64)$$

$$F_{ext,i} = (\tau_{|\Gamma_N}, \psi_i), \quad (1.65)$$

où M est appelée matrice de masse du système et A est appelée matrice de rigidité.

La construction des espaces d'approximations \mathcal{U}_t^h et \mathcal{W}^h s'appuie d'abord sur une subdivision de l'espace physique Ω , le maillage du domaine, en éléments géométriques. Sur chacun de ces éléments on définit ensuite un espace fonctionnel de dimension finie, à base de polynômes de degré fini, permettant la définition d'une base locale polynômiale. L'espace fonctionnel global (défini sur l'ensemble du domaine) est alors construit par *assemblage* (opérateur \mathbb{A}) des bases locales en une base globale. Enfin, une méthode d'intégration numérique doit être définie sur chaque élément afin de calculer les intégrales décrites précédemment. Le choix de la géométrie des éléments, des polynômes utilisés (interpolation) et enfin de la méthode de calcul des intégrales mises en jeu définit spécifiquement la méthode des éléments finis utilisée. Nous détaillons maintenant chacune de ces étapes, en précisant le plus tard possible les spécificités propres à la méthode des éléments spectraux.

Le maillage correspond à un découpage géométrique sans recouvrement, en N_e éléments Ω_e (triangles, quadrangles, etc à 2D, tétraèdres, hexaèdres, etc à 3D) de l'espace géométrique $\bar{\Omega} = \cup_{1 \leq e \leq N_e} \Omega_e$. Un maillage peut être mixte, utilisant des éléments de natures différentes (par exemple utilisation de triangles et de quadrangles), ce qui donne en principe une grande souplesse aux méthodes d'éléments finis. De plus, un maillage doit généralement être conformant, c'est-à-dire que deux éléments voisins ne peuvent partager au plus que un noeud/coin, une arête complète ou une face complète. L'index h des espaces d'approximation correspond à une longueur caractéristique du maillage, généralement définie comme la plus petite dimension des éléments sur tout le maillage. Chaque élément Ω_e est transformé en un élément de référence Λ par la transformation géométrique $\mathcal{F}_e : \Lambda \rightarrow \Omega_e, \xi \rightarrow \mathbf{x}$. Λ est de même nature que Ω_e , et nous supposons ici par souci de simplicité que tous les éléments du maillage sont de même nature. Les espaces fonctionnels \mathcal{U}_t^h et \mathcal{W}^h sont alors définis

à partir de l'ensemble des fonctions continues par morceaux, polynômiales de degré au plus N sur chaque élément (on parle d'éléments finis de degré N), soit

$$\mathcal{U}_t^h = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in (C^0(\Omega))^k, \\ \mathbf{u}_e = \mathbf{u}|_{\Omega_e} \circ \mathcal{F}_e \in \mathbb{P}_N(\Lambda), \forall 1 \leq e \leq N_e, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}|_{\Gamma_D}(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \Gamma_D \end{array} \right\}, \forall t \in I, \quad (1.66)$$

$$\mathcal{W}^h = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \in (C^0(\Omega))^k, \\ \mathbf{v}_e = \mathbf{v}|_{\Omega_e} \circ \mathcal{F}_e \in \mathbb{P}_N(\Lambda), \forall 1 \leq e \leq N_e, \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x} \in \Gamma_D \end{array} \right\}, \quad (1.67)$$

où $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ est l'espace de dimension finie $(N+1)^k$ des polynômes de degré au plus N sur Λ , et k est toujours le nombre de dimensions de l'espace physique (1 à 1D, 2 à 2D, etc). La définition des vecteurs de la base locale \mathcal{B} de $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ est une première étape déterminante dans la définition du type de méthode éléments finis utilisée. Pour un grand nombre de méthodes éléments finis (dont la méthode d'éléments spectraux), cette base locale est constituée des polynômes d'interpolation de Lagrange définis à partir de $(N+1)^k$ points définis dans l'élément de référence Λ . Pour chaque élément Ω_e , un élément de la base locale correspond donc à un point d'interpolation précis. La phase d'assemblage (construction de la base globale) consiste alors à parcourir chacun de ces points, auquel cas il y a deux possibilités :

- le point considéré est strictement intérieur à l'élément, auquel cas le vecteur de la base globale associé à ce point correspond exactement au polynôme de Lagrange associé à ce point sur l'élément considéré et s'annule partout ailleurs,
- le point considéré est situé à la frontière de l'élément (face, arête, noeud/coin), auquel cas ce point appartient à plusieurs éléments simultanément. Il définit alors autant de polynômes de Lagrange locaux dont l'assemblage continu (méthode de Galerkin continue) définit alors le vecteur de la base globale correspondant à ce point. Si le point considéré est sur une frontière du domaine sur laquelle on applique une condition de Dirichlet, un traitement supplémentaire est appliqué.

La méthode de quadrature utilisée permet de calculer numériquement les intégrales définies sur l'élément de référence Λ . On calcule l'intégrale d'une fonction f sur cet élément par (ici à 2D)

$$\int_{\Lambda} f d\mathcal{V} = \sum_{0 \leq i,j \leq N} w_{i,j} f(\xi_i, \eta_j), \quad (1.68)$$

où $(\xi_i, \eta_j)_{i,j}$ sont appelés points d'intégration et où les $w_{i,j}$ sont des coefficients prédéterminés appelés poids d'intégration. Pour calculer l'intégrale de f sur un élément il est donc nécessaire d'évaluer f seulement en un nombre fini de points. La détermination des points d'intégrations et des poids associés définit précisément la méthode de quadrature. La précision de la méthode de quadrature (contrôle de l'erreur commise) se définit généralement par rapport au degré maximal des polynômes pour lesquels la méthode de quadrature est exacte.

Pour être optimale, la méthode des éléments spectraux utilise la paramétrisation éléments finis suivante :

- les éléments sont des quadrangles à 2D (des hexaèdres à 3D) ce qui permet de construire les polynômes 2D (respectivement 3D) utilisés sur un élément par tensorisation de polynômes 1D,
- les polynômes d'interpolation 1D sont de haut degré N (usuellement $4 \leq N \leq 10$, exemple en Figure 1.2) et définis comme polynômes de Lagrange à partir des points de Gauss-Lobatto-Legendre ($N + 1$ points GLL, exemple en Figure 1.1),
- la méthode de quadrature utilise les mêmes points GLL (on parle de points colloqués ou points de collocation).

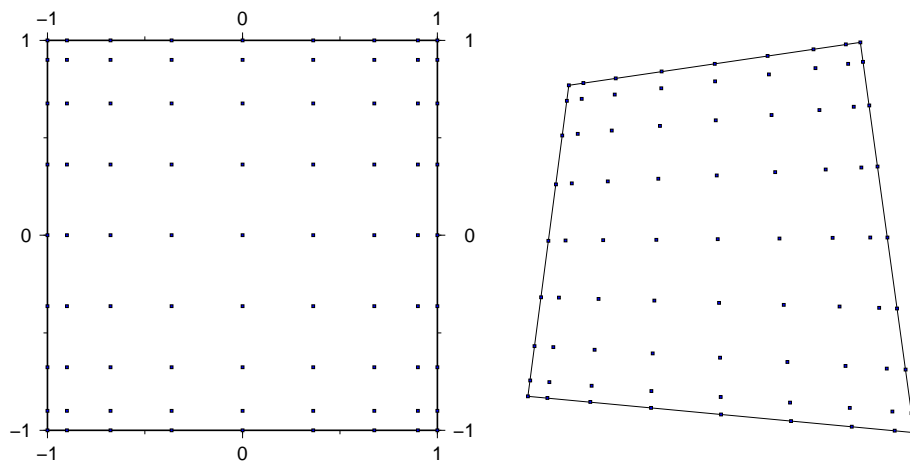


FIGURE 1.1 – Points GLL dans l'élément de référence Λ^2 (gauche), points GLL dans un élément fini après transformation \mathcal{F}_e (droite)

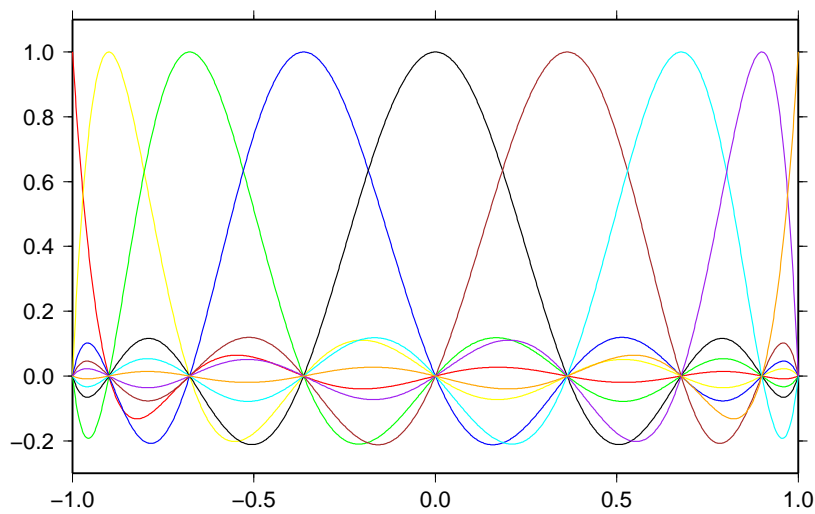


FIGURE 1.2 – Les 9 polynômes de Lagrange associés aux points GLL de degré 8

En notant désormais $\Lambda = [-1, 1]$ le segment de référence et le maillage de Ω étant à base de quadrangles (éventuellement courbes), chaque élément 2D Ω_e s'obtient par la transformation par \mathcal{F}_e du carré de référence noté $\Lambda^2 = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Pour $N \in \mathbb{N}$, les $N + 1$ points $(\xi_j)_{0 \leq j \leq N}$ de Gauss-Lobatto-Legendre sont les racines de $(1 - X^2)L'_N(X)$ où $L_N \in \mathbb{P}_N(\Lambda)$ est le polynôme de Legendre de degré N défini sur Λ . A 2D, les points GLL sont définis par tensorisation $(\xi_i, \xi_j)_{0 \leq i, j \leq N}$ sur le carré de référence Λ^2 . Cette tensorisation des polynômes apporte une restriction au maillage : il est nécessaire que l'élément de référence Λ^2 soit un carré et donc que les éléments soient basés sur des quadrangles (éventuellement courbes). La méthode de quadrature de Gauss-Lobatto-Legendre est exacte pour des polynômes de degré au plus $2N - 1$. Une erreur systématique mais faible est donc introduite dans le calcul de la matrice de masse qui fait intervenir au mieux, c'est-à-dire dans le cas où le paramètre α est homogène, l'intégration de polynômes de degré $2N$ de

$$M_{ij} = m(\phi_j, \psi_i) = \int_{\Omega} \alpha \phi_j \cdot \psi_i dV = \sum_{1 \leq e \leq N_e} \int_{\Lambda^2} \alpha \phi_j \circ \mathcal{F}_e \cdot \psi_i \circ F_e \cdot |J_{\mathcal{F}_e}|, \quad (1.69)$$

chaque $\phi_j \circ \mathcal{F}_e$ et $\psi_i \circ F_e$ étant un polynôme de degré N et $|J_{\mathcal{F}_e}|$ étant le Jacobien de la transformation \mathcal{F}_e . Plus α varie sur l'élément ou perd en régularité (un cas critique étant que α soit discontinu), plus l'erreur commise est importante, ceci réduisant considérablement l'intérêt de la méthode. Il est donc nécessaire de mailler toutes les interfaces de sorte que les discontinuités n'apparaissent que sur les frontières des éléments. Cette restriction s'ajoutant à celle d'un maillage à base de quadrangles rend critique le travail de création du maillage qui s'avère dans certains cas extrêmement complexe voire non exploitable (car générant des éléments trop petits ou trop déformés) ou irréalisable (milieux 3D très hétérogènes, par exemple).

La dernière particularité de la méthode des éléments spectraux réside dans la collocation des points d'interpolation aux points GLL utilisés pour l'intégration. Pour $i \in (0, N)$ on note $L_i(\xi) = \prod_{0 \leq k \neq i \leq N} \frac{\xi - \xi_k}{\xi_i - \xi_k}$ le i^{eme} polynôme de Lagrange défini sur le segment Λ . On a donc $L_i(\xi_j) = \delta_{ij}$ avec δ_{ij} le symbole de Kronecker valant 1 si $i = j$ et 0 sinon. A 2D, les polynômes de Lagrange sont obtenus par tensorisation : $L_{ij}(\xi, \eta) = L_i(\xi) L_j(\eta)$ et forment une base de l'ensemble $\mathbb{P}_N[\Lambda^2]$ des polynômes de degré au plus N sur Λ^2 . Une propriété importante découlant de cette collocation des points de quadrature avec les points d'interpolation est que la matrice de masse devient diagonale par construction : un schéma en temps explicite alors peut être utilisé pour résoudre le système différentiel (1.60, 1.61).

1.2.4 Discrétisation en temps

Schéma de Newmark

La discrétisation en temps du système différentiel (1.60, 1.61) se fait par un schéma de Newmark (Hugues 1987) basé sur un développement limité tronqué à l'ordre 2 de la dérivée en temps. Pour la formulation en accélération que nous avons explicitée, on calcule les champs au temps

$t^{n+1} = t^n + \Delta t$ par

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^{n+1} = -\mathbf{A}\mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{F}_{int}^{n+1} + \mathbf{F}_{ext}^{n+1}, \quad (1.70)$$

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \Delta t \dot{\mathbf{U}}^n + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{U}}^n + \beta \ddot{\mathbf{U}}^{n+1} \right], \quad (1.71)$$

$$\dot{\mathbf{U}}^{n+1} = \dot{\mathbf{U}}^n + \Delta t \left[(1 - \gamma) \ddot{\mathbf{U}}^n + \gamma \ddot{\mathbf{U}}^{n+1} \right], \quad (1.72)$$

où β et γ sont des paramètres utilisateurs. On résout le système (1.70, 1.71, 1.72) par un algorithme prédictor-multicorrecteur. En pratique, une formulation en vitesse-contrainte est utilisée de manière totalement équivalente (Festa et Vilotte 2005).

Stabilité

On trouve (Simo et al. 1992) que ces schémas sont d'ordre 2 si et seulement si $\gamma = 1/2$ et qu'ils assurent la conservation du moment angulaire total si et seulement si ($\gamma = 1/2$, et $\beta = 0$). Ils sont alors seulement conditionnellement stables (Hugues 1987) et suivent la condition de Courant-Friedrichs-Lewy

$$\Delta t \leq C \frac{\delta x}{V} \quad (1.73)$$

où δx est la plus petite distance entre deux issus du maillage (points GLL compris), V est la vitesse des particules (on peut alors choisir d'utiliser un majorant de cette quantité) et C est le nombre de Courant et se situe typiquement (empiriquement) dans la plage : $0.4 \leq C \leq 0.9$. Cette condition de stabilité exprime que pour tout pas de temps, chaque point physique du domaine doit voir l'information susceptible de le traverser.

1.2.5 Conditions aux limites radiatives

Lorsque l'on traite théoriquement d'un domaine infini on doit en pratique limiter le domaine de calcul à un domaine fini et adjoindre une frontière fictive simulant le caractère infini du domaine. Ceci est obtenu par l'adjonction sur ces bords d'une couche d'éléments absorbante appelée Perfectly Matched Layer (PML) (Komatitsch et Tromp 2003, pour les éléments spectraux). Le principe est d'utiliser dans ces éléments un prolongement analytique \hat{x} dans le plan complexe des variables d'espace x exprimé ici en cartésien par

$$\hat{x}_i = \int_0^{x_i} \mathbf{s}_i(\tilde{\zeta}, \omega) d\tilde{\zeta}, \quad (1.74)$$

où s est fonction des variables d'espace et de la fréquence ω et dont la forme dépend des spécificités du problème mathématique étudié. Un tel prolongement est construit de sorte à provoquer une évanescence rapide des ondes dans la couche de PMLs ce qui est plus visible au travers de l'expression des ondes planes $\exp(i\omega t - \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{x}})$ avec \hat{x} désormais complexe. En pratique on utilise les PMLs adaptées à la formulation en vitesse-contrainte décrites dans Festa et Vilotte (2005).

1.3 HOMOGÉNÉISATION DES ONDES ÉLASTIQUES

1.3.1 Introduction

Une définition générale de l'homogénéisation d'un milieu fait appel à la notion d'échelles de description de ce milieu, en en distinguant au moins deux (microscopique et macroscopique), et en termes de leur simplification. Il s'agit de transformer un milieu contenant des éléments discernables et de petites tailles (échelle microscopique) en un milieu plus uniforme, lissé voire complètement homogène, c'est-à-dire défini à une échelle plus large (échelle macroscopique).

Dans les domaines de la physique et des mathématiques, cette notion se formalise comme suit :

soit un problème S défini à une échelle microscopique, de paramètres infinitésimaux C et de solution X ,

peut-on déterminer, à l'échelle macroscopique, des paramètres effectifs C^* et un problème effectif associé S^* tels que la solution X^* de S^* vaut toujours X ou bien approche X à une précision voulue ?

L'intérêt immédiat d'un tel procédé dit d'homogénéisation est naturellement calculatoire, la résolution du problème effectif S^* étant plus simple (plus rapide, moins demandeur de ressources) que celle du problème S initial. Un second intérêt est d'ordre intellectuel, la méthode d'homogénéisation permettant de comprendre différemment l'effet des petites échelles sur le problème à résoudre.

De tels problèmes se rencontrent souvent en mécanique des structures. Un exemple simple et très illustratif est celui des structures métalliques en croisillons utilisées pour la construction des ponts. Un tel agencement offre une résistance optimale en répartissant les efforts sur l'ensemble de la structure. La connaissance de la résistance globale d'une cellule croisillon élémentaire, sans nécessairement en connaître les détails internes, permet alors le dimensionnement du pont grâce au caractère périodique de l'ouvrage à l'échelle de la cellule. On peut évoquer d'autres exemples comme les renforts par microstructures ou plus récemment les nano-tubes pour l'utilisation desquels on ne souhaitera connaître en définitive que les propriétés macroscopiques, les paramètres dits *effectifs*.

La plupart des applications de ces microstructures homogénéisables impliquent la répétition périodique (ou quasi-périodique) d'un motif défini à l'échelle microscopique. Dans un tel cas, le calcul des paramètres et équations effectifs se fait de manière déterministe ; la littérature étant très fournie, on ne cite ici que les travaux très décisifs de Bensoussan et al. (1978), Papanicolaou et Varadhan (1979), Sanchez-Palencia (1980), Allaire (1992). Dans le cas où le milieu ne peut pas être décrit de manière périodique à l'échelle microscopique, on parle d'homogénéisation non périodique et le calcul des paramètres effectifs se fait généralement au travers de méthodes stochastiques ou numériques (Bensoussan et al. 1978, par exemple), des méthodes déterministes étant alors plus difficiles à mettre en œuvre.

Dans le cadre de la sismologie, le problème revient à homogénéiser le milieu terrestre, assimilé à un milieu élastique, dans le cadre de la propagation des ondes sismiques. La notion d'échelles est introduite par la

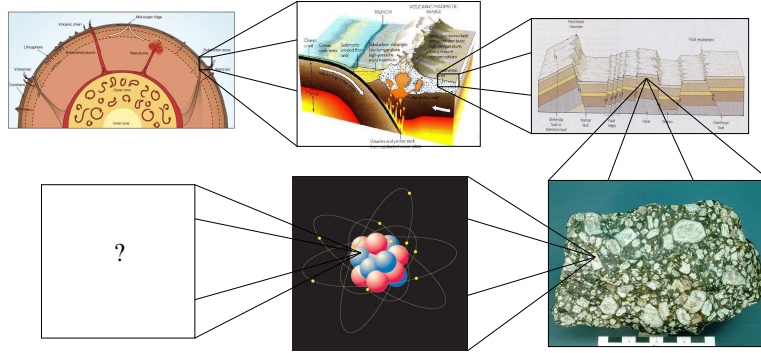


FIGURE 1.3 – Hétérogénéité des milieux de propagation des ondes sismiques à toutes les échelles (crédits Y. Capdeville)

comparaison des longueurs d'onde des ondes propagées et de la taille des hétérogénéités présentes dans le milieu de propagation. D'une part, il est possible de considérer les milieux terrestres comme hétérogènes pour de nombreuses échelles de description (Figure 1.3). D'autre part, que ce soit pour des raisons physiques (atténuation, bande passante finie des instruments de mesure, ...), par choix d'analyse (filtrage des sismogrammes), ou bien pour des raisons de limitation de moyens (réduction du coût des méthodes de calcul), on travaille généralement à bande de fréquences finie. Il en résulte l'existence d'une fréquence maximale f_c dans le signal et donc d'une longueur d'onde minimale que l'on peut estimer grâce à

$$\lambda_m \simeq \frac{V_m}{f_c}, \quad (1.75)$$

où V_m désigne la vitesse minimale de propagation des ondes dans le milieu étudié. En notant λ une longueur liée aux hétérogénéités (par exemple leur diamètre minimal) on définit

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{\lambda_m}. \quad (1.76)$$

L'homogénéisation des ondes élastiques entre en jeu lorsque la taille des hétérogénéités λ est petite par rapport à la longueur d'onde minimale λ_m du champ d'onde, c'est-à-dire lorsque $\varepsilon \ll 1$, et nous supposons que ce sera toujours le cas par la suite. Il s'agit alors de transformer le problème (1.45-1.49) défini à l'échelle microscopique en un problème effectif équivalent, idéalement de la forme :

$$\rho^* \ddot{\mathbf{u}}^* - \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}^*) = \mathbf{f}, \quad (1.77)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{c}^* : \nabla(\mathbf{u}^*), \quad (1.78)$$

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad (1.79)$$

$$\mathbf{v}^*(\mathbf{x}, 0) = \dot{\mathbf{u}}^*(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \quad (1.80)$$

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}|_{\Gamma_D}(\mathbf{x}), \text{ sur } \Gamma_D = \partial\Omega_D, \quad (1.81)$$

$$(\mathbf{c} : \nabla \mathbf{u})^*(\mathbf{x}, t) = \tau|_{\Gamma_N}(\mathbf{x}), \text{ sur } \Gamma_N = \partial\Omega_N, \quad (1.82)$$

de paramètres effectifs (ρ^*, \mathbf{c}^*) et dont la solution $(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*)$ est une bonne approximation du champ d'ondes $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$. Il est à noter que dans la suite,

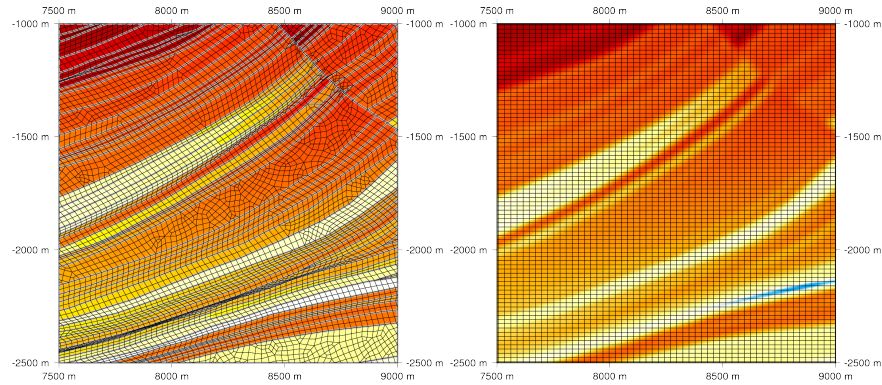


FIGURE 1.4 – Cartographie de vitesse des ondes S et maillage (lignes noires) dans une partie très hétérogène du milieu Marmousi2 (Martin 2004, Martin et al. 2006) dans le milieu original (gauche) et dans le milieu homogénéisé (Figure issue de Capdeville et al. 2010b)

le symbole $*$ servira toujours à dénoter le caractère effectif du paramètre ou de la variable qu'il indexe.

Deux raisons nous poussent à nous intéresser aux méthodes d'homogénéisation pour la propagation des ondes. La première est d'ordre physique : on sait que les ondes ne sont sensibles aux hétérogénéités de taille beaucoup plus petite que leur longueur d'onde que de manière globale, effective. Connaître le milieu et les équations effectifs de propagation des ondes reviendrait donc à connaître la physique réellement perçue par les ondes. La seconde raison est d'ordre pratique puisqu'il s'agit d'alléger le temps de calcul. La méthode des éléments spectraux est optimale pour un maillage à base de quadrangles (ou hexaèdres à 3D) contenant de faibles variations dans chaque élément. La construction de maillages remplissant ces conditions pour des milieux très hétérogènes, c'est-à-dire comportant des hétérogénéités de très petite taille, peut s'avérer un problème difficile voire impossible dans certains cas, notamment à 3D. Même lorsque le maillage peut être défini, celui-ci peut s'avérer inexploitable à cause d'éléments trop déformés ou trop fins, et le pas de temps, contraint par la condition CFL, devenant à son tour très petit, le temps de calcul devient trop important. Un milieu homogénéisé étant continu et à variations lentes, le maillage associé peut être choisi régulier et à nouveau défini uniquement à partir de l'échantillonnage correct de la plus petite longueur d'onde à propager comme l'illustre la Figure 1.4.

1.3.2 Première approche : milieux stratifiés

Avant de présenter précisément la méthode mathématique d'homogénéisation des ondes élastiques dans un cadre général, nous présentons ici certaines caractéristiques de la méthode ainsi que certains outils au travers du cas particulier des milieux dits stratifiés (ou lamellés ou encore Vertical Transverse Isotrope). De tels milieux se décrivent par l'empilement continu ou discontinu de couches (généralement horizontales) de matériaux d'épaisseurs quelconques, chaque couche possédant ses paramètres élastiques propres, constants, *a priori* isotropes dans la couche (condition non nécessaire).

L'étude de tels milieux s'avère très utile car une structure en couches est souvent utilisée en première approximation, que ce soit à l'échelle de la Terre (couches de lithosphère, asthénosphère, ...) ou à des échelles plus restreintes (milieux sédimentaires). Un tel milieu, qui peut être assimilé à un milieu 1D, a donné lieu à de multiples études et utilisations. Lorsque l'épaisseur des couches reste faible par rapport aux longueurs d'onde du champ d'onde, le champ d'ondes voit un milieu équivalent généralement anisotrope dont les paramètres effectifs peuvent s'obtenir de manière théorique (Backus 1962).

Comme on s'intéresse ici à un comportement effectif des matériaux, comportement moyen d'un certain point de vue, il est assez intuitif de vouloir utiliser un outil mathématique de moyenne afin de déterminer les coefficients effectifs. Deux questions surviennent immédiatement :

- comment définir cet outil de moyenne ?
- sur quelles quantités appliquer une telle moyenne ?

Les deux paragraphes qui suivent répondent à ces deux questions et montrent notamment en quoi la seconde ne pose pas correctement le problème de l'homogénéisation.

Moyennes et filtres

En termes de définition de moyenne, le cas le plus aisé à traiter est le cas de micro-structures périodiques. À 2D, en définissant la cellule de périodicité comme étant le pavé $\mathbf{Y} = [0, Y_1] \times [0, Y_2]$ de mesure $|\mathbf{Y}| = Y_1 Y_2$, une fonction g (éventuellement vectorielle) de la variable réelle $\mathbf{y} = {}^T(y_1, y_2)$ est dite \mathbf{Y} -périodique si et seulement si $\forall \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, \forall (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2, g(y_1 + n_1 Y_1, y_2 + n_2 Y_2) = g(y_1, y_2)$. On définit alors naturellement la moyenne $\langle g \rangle$ d'une telle fonction g comme étant la moyenne sur sa période

$$\langle g \rangle = \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \int_{\mathbf{Y}} g(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (1.83)$$

Une propriété intéressante de cette moyenne, qui découle de cette définition, est

$$\langle \partial_{y_i} g \rangle = 0, \forall i \in [1, 2]. \quad (1.84)$$

Dans le cas non périodique, on introduit la notion de *fenêtre* ou encore *longueur de moyennage*. On cherche à moyenner une fonction g localement autour d'un point \mathbf{x} c'est-à-dire sur une certaine distance λ_0 autour de ce point. En effet les variations de g pertinentes pour définir son comportement effectif au point \mathbf{x} considéré sont nécessairement localisées autour de ce point. Pour les milieux lamellés, assimilables à des milieux 1D (de la variable notée ici y), Backus (1962) introduit un tel fenêtrage par l'utili-

sation d'une fonction de poids 1D w dont les propriétés sont

$$w \geq 0, \quad (1.85)$$

$$\int_{\mathbb{R}} w(y) dy = 1, \quad (1.86)$$

$$\int_{\mathbb{R}} y w(y) dy = 0, \quad (1.87)$$

$$\int_{\mathbb{R}} y^2 w(y) dy = \lambda_0^2. \quad (1.88)$$

L'opérateur de moyennage $\langle . \rangle$ est défini par convolution de la fonction g à moyenner avec l'ondelette w

$$\langle g \rangle(y) = g * w(y) = \int_{\mathbb{R}} g(y) w(y - y') dy', \quad (1.89)$$

ce qui définit $\langle . \rangle$ comme une moyenne glissante sur la longueur moyenne λ_0 . Contrairement au cas périodique, le résultat dépend toujours de la position y . Une telle définition par convolution et fonction de poids se généralise en fait très naturellement à 2D (ou 3D) et permet ici l'introduction, par l'analyse de Fourier, de la notion de filtre passe-bas.

Soit g une fonction (éventuellement vectorielle) de la variable spatiale $\mathbf{y} = {}^T(y_1, y_2)$ et w une fonction de poids. On définit tout d'abord la transformée $\mathcal{F}^w(g)$,

$$\mathcal{F}^w(g)(\mathbf{y}) = g * w(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^2} g(\mathbf{y}) w(\mathbf{y} - \mathbf{y}') d\mathbf{y}'. \quad (1.90)$$

L'outil de moyennage de Backus en est donc un cas particulier.

Par ailleurs, la transformée de Fourier $F[g]$ de g définit une fonction de la variable fréquentielle $\mathbf{k} = {}^T(k_1, k_2)$ appelé vecteur d'onde,

$$F[g](\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^2} g(\mathbf{y}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (1.91)$$

Cette transformation vérifie la propriété de contraction/dilatation

$$F[g](a\mathbf{x}) = \frac{1}{|a|} F[f]\left(\frac{\mathbf{k}}{a}\right), \quad (1.92)$$

pour toute fonction g et tout réel a . La courbe de $|F[g]|$ en fonction de \mathbf{k} définit le spectre de puissance de g illustrant le contenu fréquentiel de la fonction g (exemple en Figure 1.5). Le vecteur d'onde \mathbf{k} est alors associé à une longueur d'onde λ par $\lambda = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}|}$. On a alors la relation fondamentale :

$$F[g * w] = F[g] \cdot F[w] \quad (1.93)$$

Utiliser une ondelette $w = w_0$ dans 1.90, où $W_0 = F[w_0]$ s'annule pour tout \mathbf{k} tel que $|\mathbf{k}| > |\mathbf{k}_0|$ (comme illustré en Figure 1.5) coupe les hautes fréquences initialement présentes dans la fonction g et définit donc comme un filtre passe-bas de longueur d'onde de coupure λ_0 l'opérateur

$$\mathcal{F}^{\lambda_0}(g)(\mathbf{y}) = g * w_0(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^2} g(\mathbf{y}) w_0(\mathbf{y} - \mathbf{y}') d\mathbf{y}'. \quad (1.94)$$

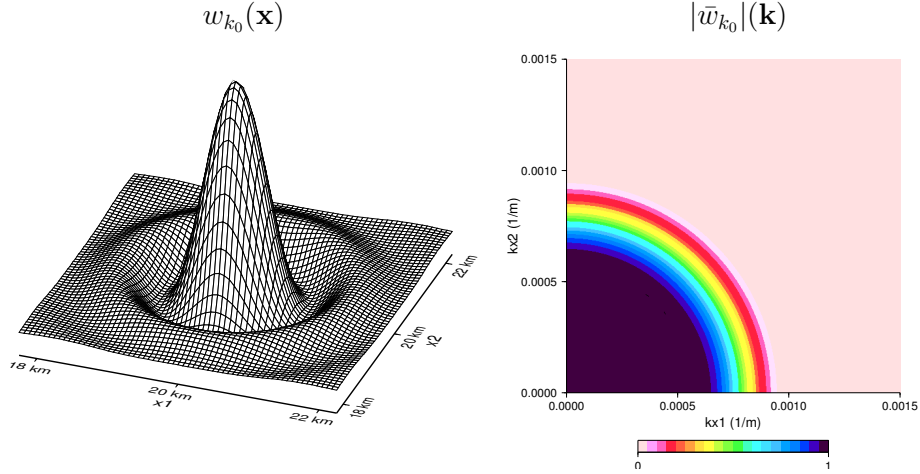


FIGURE 1.5 – Exemple d'ondelette de filtrage (gauche) et son spectre de puissance (droite)

Idéalement le filtre est invariant par composition, c'est-à-dire que l'on a la propriété

$$\mathcal{F}^{\lambda_0} \circ \mathcal{F}^{\lambda_0} (g) = \mathcal{F}^{\lambda_0} \left(\mathcal{F}^{\lambda_0} (g) \right) = \mathcal{F}^{\lambda_0} (g), \quad (1.95)$$

où le symbole \circ représente l'opérateur de composition de fonctions (application successive). La propriété 1.95 n'est rigoureusement exacte que lorsque l'ondelette W_0 effectue une coupure instantanée en λ_0 . Dans un tel cas, le support en espace de l'ondelette w_0 devient infini et le filtrage effectif par la relation 1.94 devient difficile. L'ondelette W_0 est donc généralement définie avec une zone de coupure adoucie afin que le support en espace de l'ondelette w_0 reste de dimension raisonnable mais en respectant toutefois une bonne approximation de la propriété 1.95.

En pratique l'ondelette de filtrage w_0 (encore notée w_{k_0}) que l'on utilise possède une symétrie de révolution (axisymétrique) (visualisée en Figure 1.5). En notant W_0^0 sa transformée de Fourier, on a

$$W_0^0(\mathbf{k}) = \begin{cases} 1, & \forall \mathbf{k}, |\mathbf{k}| < k_1 \\ \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\pi \frac{(|\mathbf{k}| - k_1)}{k_0 - k_1} \right) \right), & \forall \mathbf{k}, k_0 \leq |\mathbf{k}| \leq k_1 \\ 0, & \forall \mathbf{k}, k_0 < |\mathbf{k}| \end{cases} \quad (1.96)$$

où $k_0 = \frac{1}{\lambda_0}$ est la fréquence de coupure du filtre et k_1 est un paramètre utilisateur permettant d'obtenir le compromis entre un filtre à support spatial fini ($k_1 \neq k_0$) et une approximation satisfaisante de la condition 1.95 ($k_1 \sim k_0$). En pratique, l'ondelette w_0 est à symétrie cylindrique (axisymétrie) dans le domaine spatial, et l'on a

$$w_0(\mathbf{x}) = w_0(\|\mathbf{x}\|), \quad (1.97)$$

en confondant abusivement les notations pour les fonctions w_0 de la variable vectorielle et de la variable scalaire. Le choix de k_1 permet alors d'approximer le rayon L_0 du support spatial du filtre via la relation $L_0 = \frac{1,6}{k_0 - k_1}$ et l'on a généralement $2\lambda_0 < L_0 < 5\lambda_0$. Sauf précision contraire, on estimera usuellement L_0 par $L_0 \simeq 3,5\lambda_0$.

Enfin, l'ondelette de filtrage doit vérifier

$$\int_{\mathbb{R}^2} w_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1, \quad (1.98)$$

ce qui est assuré numériquement par la normalisation de l'ondelette w_0 précédemment définie et utilisée en 1.94 par le facteur $\int_{\mathbb{R}^2} w_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$.

Il est de plus à noter que pour une fonction g périodique dont la période est plus petite que λ_0 on a

$$\mathcal{F}^{\lambda_0}(\langle g \rangle) = \langle g \rangle. \quad (1.99)$$

Milieu stratifié

Pour un milieu 2D élastique décrit (ici en notation de Voigt) par un empilement de couches horizontales d'épaisseurs quelconques mais faibles devant la longueur d'onde minimale λ_m du champ d'onde, le milieu élastique effectif s'obtient (Backus 1962) grâce aux relations :

$$\rho^* = \langle \rho \rangle, \quad (1.100)$$

$$\mathbf{C}_{11}^* = \left\langle \mathbf{C}_{11} - \frac{\mathbf{C}_{12}^2}{\mathbf{C}_{22}} \right\rangle + \left\langle \frac{1}{\mathbf{C}_{22}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\mathbf{C}_{12}}{\mathbf{C}_{22}} \right\rangle^2, \quad (1.101)$$

$$\mathbf{C}_{22}^* = \left\langle \frac{1}{\mathbf{C}_{22}} \right\rangle^{-1}, \quad (1.102)$$

$$\mathbf{C}_{33}^* = \left\langle \frac{1}{\mathbf{C}_{33}} \right\rangle^{-1}, \quad (1.103)$$

$$\mathbf{C}_{12}^* = \left\langle \frac{1}{\mathbf{C}_{22}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\mathbf{C}_{12}}{\mathbf{C}_{22}} \right\rangle, \quad (1.104)$$

$$(1.105)$$

où $\langle \rangle$ est l'opérateur de moyenne glissante, défini par 1.89.

Les expressions (1.100-1.104) constituent un résultat, illustré en Figure 1.6, particulièrement riche en informations.

Premièrement, dans le cas où les couches se répètent périodiquement, l'opérateur de moyenne est alors celui défini par 1.83 et le milieu effectif est homogène, la moyenne sur une période ne dépendant plus de la position.

Deuxièmement, le milieu effectif est anisotrope (en particulier $V_{PH}^* = \sqrt{\frac{\mathbf{C}_{11}^*}{\rho^*}} \neq V_{PV}^* = \sqrt{\frac{\mathbf{C}_{22}^*}{\rho^*}}$) avec une anisotropie potentiellement complexe, c'est-à-dire dépendant de manière complexe de l'angle par rapport à la verticale, comme le montre l'anisotropie en diamant de la Figure 1.6.

Troisièmement, les coefficients élastiques ne se calculent ni simplement ni linéairement à partir des coefficients élastiques initiaux. Certains coefficients s'obtiennent effectivement de façon simple par moyenne arithmétique (ρ^*) ou harmonique ($\mathbf{C}_{22}^*, \mathbf{C}_{33}^*$), mais ce n'est pas le cas de tous les paramètres effectifs. Ainsi, des tentatives simples d'obtention des paramètres effectifs (comme par exemple essayer $\mathbf{C}_{IJ}^* = \langle \mathbf{C}_{IJ} \rangle$ ou $\mathbf{C}_{IJ}^* = \langle \mathbf{C}_{IJ}^{-1} \rangle$) sont insuffisantes dans le cas lamellé.

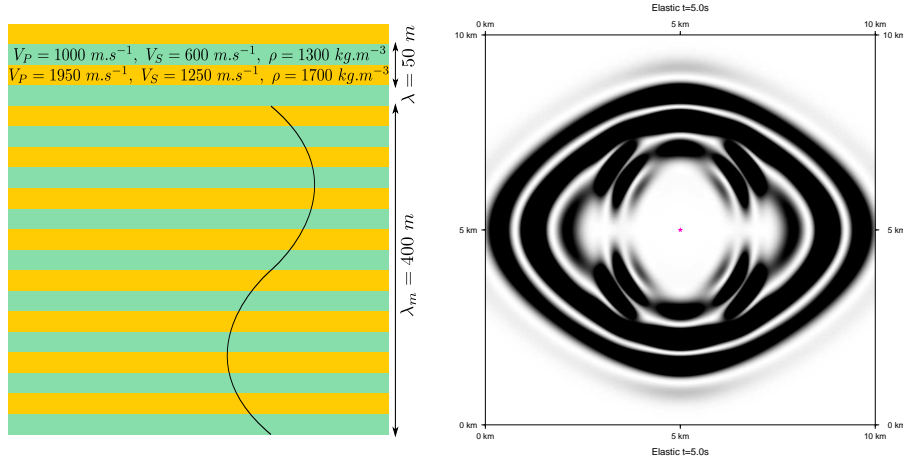


FIGURE 1.6 – Milieu stratifié périodique à 2 couches isotropes (gauche) et image de l'énergie élastique à $t = 5s$.

La procédure d'homogénéisation pour les milieux lamellés ne se réduisant pas à un processus linéaire sur les paramètres élastiques, il en sera de même pour toute procédure d'homogénéisation plus générale. Cette notion est importante car elle élimine en particulier la possibilité d'obtention des paramètres élastiques effectifs par un simple filtrage direct des paramètres élastiques dans le cas non périodique. Ceci répond partiellement à la question des quantités sur lesquelles appliquer le moyennage/filtrage : il ne s'agit pas de quantités physiques évidentes et immédiates. Mais si l'homogénéisation ne se réduit pas à un moyennage ou filtrage, ces outils restent cependant indispensables à la méthode.

1.3.3 Homogénéisation déterministe périodique

Les méthodes d'homogénéisation déterministes pour les milieux périodiques suivent en général le formalisme suivant : pour homogénéiser à l'échelle λ_m un problème S de solution X et de paramètres C définis périodiquement aux petites échelles avec une période $\ell_0 \ll \lambda_m$, on étudie la suite de problèmes S^ε de paramètres C^ε et de solution X^ε indexés de manière univoque par le paramètre $\varepsilon = \frac{\ell}{\lambda_m}$ (comme en 1.76), où ℓ désigne une période quelconque. Le problème initial correspond alors à la paramétrisation $\varepsilon = \varepsilon_0 = \frac{\ell_0}{\lambda_m}$. Pour prendre en compte de manière explicite les variations à l'échelle microscopique on construit les variables rapides d'espace \mathbf{y} à partir des variables initiales (lentes) \mathbf{x} par :

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \quad (1.106)$$

Asymptotiquement, lorsque ε tend vers 0, une variation en \mathbf{y} implique très peu de variation en \mathbf{x} et l'on considère alors les variables \mathbf{x} et \mathbf{y} comme indépendantes. Les opérateurs de dérivation présents dans la définition de S^ε sont alors adaptés en conséquence, ainsi on aura pour le gradient :

$$\nabla(\cdot) \longrightarrow \nabla_{\mathbf{x}}(\cdot) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_{\mathbf{y}}(\cdot) \quad (1.107)$$

A cause de leur périodicité, les paramètres sont très simplement transformés par :

$$C^\varepsilon(\mathbf{x}) \longrightarrow C(\mathbf{y}) = C^\varepsilon(\varepsilon\mathbf{y}) \quad (1.108)$$

où $C(\mathbf{y})$ ne dépend plus de ε , n'est défini qu'aux petites échelles et est périodique de période λ_m dans chaque direction d'espace rapide. Les solutions X^ε sont alors cherchées sous la forme de série entière en ε :

$$X^\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \sum_{i \geq 0} \varepsilon^i X_i\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t\right) \quad (1.109)$$

où pour chaque i , $X_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ est λ_m -périodique en \mathbf{y} .

L'introduction de cette écriture en série et des paramètres C dans le problème S^ε , et l'identification des coefficients selon les puissances de ε induit alors une série discrète de problèmes S_i^ε dont le traitement successif jusqu'à l'ordre n , que nous exposerons en détails dans la méthode non périodique, permet l'obtention du problème effectif $S^{*,n}$ d'ordre n , de ses paramètres effectifs $C^{*,n}$ et de l'approximation d'ordre n (par troncature) de la solution :

$$X^{\varepsilon,n}(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i X_i\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t\right) \quad (1.110)$$

Un théorème de convergence sur ε (que nous n'exposerons pas dans cette thèse mais que l'on trouve par exemple dans Sanchez-Palencia 1980) assure alors que la solution obtenue par le problème homogénéisé converge bien (au moins faiblement) vers la solution exacte du problème initial :

$$X^\varepsilon(\mathbf{x}, t) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} X(\mathbf{x}, t) \quad (1.111)$$

1.3.4 Homogénéisation déterministe non périodique

Les milieux terrestres étant des milieux complexes généralement non périodiques, en particulier lorsqu'on les considère aux très petites échelles, la méthode d'homogénéisation périodique ne peut pas être directement utilisée. Les problèmes d'homogénéisation pour des structures non périodiques amènent à considérer des méthodes soit stochastiques soit déterministes (Bensoussan et al. 1978). Dans le cas de la propagation des ondes, la méthode déterministe d'homogénéisation non périodique (Capdeville et al. 2010a;b) s'inspire et rejoint par certains aspects la méthode déterministe périodique. On considère alors le problème S défini par les équations (1.45-1.49) de solutions $(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \sigma(\mathbf{x}))$ et de paramètres $(\rho(\mathbf{x}), \mathbf{c}(\mathbf{x}))$.

Suite de problèmes virtuels

On reprend ainsi le petit paramètre $\varepsilon = \frac{\lambda}{\lambda_m} \ll 1$ défini en 1.76 en tant qu'index des petites échelles, rapportées à la longueur d'onde minimale du champ d'ondes à propager. Dans le cas non périodique, λ est une longueur quelconque caractéristique des hétérogénéités. Il n'y a cependant plus de repère physique comme la périodicité pour définir le cas réel. Il est toutefois nécessaire d'introduire un paramètre limite ε_0 tel que :

$$\varepsilon \leq \varepsilon_0 = \frac{\lambda_0}{\lambda_m} \ll 1 \quad (1.112)$$

où λ_0 représente la taille maximale des hétérogénéités à homogénéiser. Ce paramètre, défini par l'utilisateur, contrôle le degré de détails laissés dans le milieu après homogénéisation. Plus λ_0 sera petit, plus il restera de détails dans le milieu homogénéisé et donc moins l'approximation par le milieu effectif sera grossière. D'un point de vue mathématique, ce paramètre doit rester fixe pour assurer l'utilisation du théorème de convergence (Sanchez-Palencia 1980).

Pour un paramètre de contrôle ε_0 fixé, on s'intéresse à une suite de problèmes virtuels $S^{\varepsilon, \varepsilon_0}$ indexés par ε . Cependant, contrairement au cas périodique classique, la construction de cette suite de problèmes intervient après la définition des variables rapides et de certains espaces fonctionnels associés. Pour prendre en compte de manière explicite les petites échelles on utilise à nouveau les variables d'espace rapides introduites par la relation 1.106

$$\mathbf{y} = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{x}.$$

Pour de petits ε , une variation quelconque en \mathbf{y} impliquant une petite variation en \mathbf{x} , on peut interpréter \mathbf{y} comme un échantillonnage rapide au voisinage de \mathbf{x} . Pour chaque \mathbf{x} il est alors possible de définir une cellule d'échantillonnage $\mathbf{Y}_{\mathbf{x}}$. C'est sur cette cellule de la variable rapide que l'on utilise les outils de moyennage périodique $\langle \cdot \rangle$ et de filtrage $\mathcal{F}^{\lambda_0}(\cdot)$ définis au paragraphe 1.3.2 pour obtenir un comportement effectif. Dans le cas d'un milieu périodique aux petites échelles, la cellule d'échantillonnage peut se réduire à la cellule de périodicité et seul l'outil de moyenne sur la période est nécessaire. Les dimensions de cette cellule doivent donc permettre un échantillonnage représentatif tant pour la moyenne que pour le filtre. Plus précisément, on définit la cellule de référence $\mathbf{Y}_0 = [-\beta\lambda_0, \beta\lambda_0]^2$ où β est un paramètre défini par l'utilisateur en fonction de l'ondelette de filtrage w_0 utilisée et permettant d'inclure le support spatial du filtre $\mathcal{F}^{\lambda_0}(\cdot)$ dans \mathbf{Y}_0 . La cellule $\mathbf{Y}_{\mathbf{x}}$ se déduit de \mathbf{Y}_0 par translation de vecteur $\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}$. Asymptotiquement ($\varepsilon \rightarrow 0$), les variables d'espace lentes \mathbf{x} et rapides \mathbf{y} peuvent être considérés comme indépendantes. La dépendance des inconnues aux variables d'espaces rapides et lentes s'exprime explicitement par

$$(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \sigma(\mathbf{x}, t)) \longrightarrow (\mathbf{u}^{\varepsilon, \varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \sigma^{\varepsilon, \varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)). \quad (1.113)$$

Par cohérence, les opérateurs de différentiation spatiale se transforment en

$$\nabla \longrightarrow \nabla_{\mathbf{x}} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_{\mathbf{y}} \quad \text{et} \quad (1.114)$$

$$\epsilon(\cdot) \longrightarrow \epsilon_{\mathbf{x}}(\cdot) + \frac{1}{\varepsilon} \epsilon_{\mathbf{y}}(\cdot), \quad (1.115)$$

avec $\epsilon_{\tilde{\zeta}}(\mathbf{u}) = \frac{\nabla_{\tilde{\zeta}} \mathbf{u} + \nabla_{\tilde{\zeta}}^T \mathbf{u}}{2}$ pour $\tilde{\zeta} = \mathbf{x}$ ou $\tilde{\zeta} = \mathbf{y}$.

Deux espaces fonctionnels sont alors successivement introduits :

- l'espace \mathcal{T} des fonctions \mathbf{Y}_0 périodiques en leur variable rapide $\mathcal{T} = \{h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, \mathbf{Y}_0 - \text{périodique en la variable } \mathbf{y}\},$
- l'espace \mathcal{V} des fonctions à oscillations en \mathbf{y} uniquement rapides $\mathcal{V} = \{h \in \mathcal{T} / \mathcal{F}^{\lambda_0}(h)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle h \rangle(\mathbf{x})\}$

L'utilisation de l'espace \mathcal{T} permet de rendre localement périodique aux petites échelles les variables d'intérêt, ce qui permet d'utiliser le cadre théorique de la méthode d'homogénéisation périodique (notamment pour justifier de la convergence théorique de la méthode). L'espace \mathcal{V} correspond aux fonctions ne contenant que des oscillations rapides selon la variable \mathbf{y} autour de leur valeur moyenne (oscillations de longueur caractéristique plus petite que λ_0). L'utilisation de l'espace \mathcal{V} est assez restrictif comme nous le verrons dans la suite mais permet de considérer le cas périodique comme un cas particulier de la méthode générale car toute fonction g périodique pour laquelle \mathbf{Y}_0 est un multiple de la période est dans \mathcal{V} .

Pour construire la suite de problèmes $S^{\varepsilon, \varepsilon_0}$, on construit d'abord à partir du modèle initial $(\rho(\mathbf{x}), \mathbf{c}(\mathbf{x}))$ une paramétrisation $(\rho^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{c}^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ définie dans \mathcal{T} telle que

$$\rho^{\varepsilon_0}\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_0}\right) = \rho(\mathbf{x}), \quad (1.116)$$

$$\mathbf{c}^{\varepsilon_0}\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_0}\right) = \mathbf{c}(\mathbf{x}). \quad (1.117)$$

Cette construction est très spécifique à l'homogénéisation non périodique des ondes élastiques et sera détaillée plus loin, car elle définit en fait la procédure pratique d'homogénéisation à l'ordre 0. Une suite de paramètres virtuels $(\rho^{\varepsilon, \varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{c}^{\varepsilon, \varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ indexés par ε peut alors être naturellement définie par

$$\rho^{\varepsilon, \varepsilon_0}(\mathbf{x}) = \rho^{\varepsilon_0}\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right), \quad (1.118)$$

$$\mathbf{c}^{\varepsilon, \varepsilon_0}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\varepsilon_0}\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right). \quad (1.119)$$

Remarque : on a toujours $\rho^{\varepsilon_0, \varepsilon_0}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})$ et $\mathbf{c}^{\varepsilon_0, \varepsilon_0}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}(\mathbf{x})$.

Cette suite de paramètres permet alors de définir la suite de problèmes $S^{\varepsilon, \varepsilon_0}$

$$\rho^{\varepsilon, \varepsilon_0} \ddot{\mathbf{u}}^{\varepsilon, \varepsilon_0} - \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon, \varepsilon_0}) = \mathbf{f} \quad (1.120)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon, \varepsilon_0} = \mathbf{c}^{\varepsilon, \varepsilon_0} : \nabla(\mathbf{u}^{\varepsilon, \varepsilon_0}) \quad (1.121)$$

les conditions initiales et aux bords étant ici laissées de côté par souci de simplification (on supposera que le domaine est ici infini, par exemple). De plus, la source \mathbf{f} est supposée ici d'ordre 0 c'est-à-dire décrite seulement par la variable lente \mathbf{x} . En pratique, ceci n'est pas rigoureux pour un point source et une correction doit alors être effectuée sur le moment sismique (Capdeville et al. 2010b).

Les inconnues sont alors recherchées sous forme de séries entières en ε

$$\mathbf{u}^{\varepsilon, \varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \sum_{i \geq 0} \varepsilon^i \mathbf{u}_i^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \quad (1.122)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon, \varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \sum_{j \geq -1} \varepsilon^j \boldsymbol{\sigma}_j^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \quad (1.123)$$

où chaque fonction $\mathbf{u}_i^{\varepsilon_0}$ et $\boldsymbol{\sigma}_j^{\varepsilon_0}$ est dans \mathcal{V} . Cette condition d'appartenance dans \mathcal{V} est importante car elle implique que le développement théorique

qui suit est désormais rigoureusement identique à celui du cas périodique. Il est à noter que la notation en puissance sur les fonctions $\mathbf{u}_i^{\varepsilon_0}$ et $\sigma_j^{\varepsilon_0}$ n'indique pas une exponentiation mais une dépendance de ces fonctions au paramètre ε_0 . Pour alléger les notations, on omettra par la suite cet index (et on notera donc ces fonctions indifféremment par \mathbf{u}_i et σ_j respectivement). On notera aussi que l'indice j dans l'expansion de $\sigma^{\varepsilon, \varepsilon_0}$ est décalé et commence à -1 par cohérence entre sa définition à partir du gradient du déplacement et l'adaptation du gradient aux petites échelles 1.114.

Obtenir le problème homogénéisé à l'ordre n revient alors à déterminer les équations dont sont solutions les champs tronqués à l'ordre n :

$$\mathbf{u}^{*,n}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=0}^n \varepsilon_0^i \mathbf{u}_i\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_0}, t\right), \quad (1.124)$$

$$\sigma^{*,n}(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=-1}^n \varepsilon_0^j \sigma_j\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_0}, t\right). \quad (1.125)$$

Résolution du problème théorique d'homogénéisation

En introduisant (1.122-1.123) dans (1.120-1.121), utilisant (1.114-1.115) et identifiant pour chaque puissance de ε dans les séries on obtient la série de problèmes indicés par i et j (indices muets) :

$$\rho^{\varepsilon_0} \ddot{\mathbf{u}}_i - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\sigma_i) - \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\sigma_{i+1}) = \mathbf{f} \delta_{i0}, \quad \forall i \geq -2, \quad (1.126)$$

$$\sigma_j = \mathbf{c}^{\varepsilon_0} : [\epsilon_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}_j) + \epsilon_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}_{j+1})], \quad \forall j > -1. \quad (1.127)$$

On résout alors successivement pour chaque couple (i, j) :

– pour $(i, j) = (-2, -1)$ on a

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\sigma_{-1}) = 0, \quad (1.128)$$

$$\sigma_{-1} = \mathbf{c}^{\varepsilon_0} : \epsilon_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}_0). \quad (1.129)$$

En utilisant 1.129 dans 1.128 en multipliant par \mathbf{u}_0 et en intégrant par partie sur la cellule de périodicité \mathbf{Y}_0 , on obtient

$$\int_{\mathbf{Y}_0} \epsilon_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}_0) : \mathbf{c}^{\varepsilon_0} : \epsilon_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}_0) = \int_{\mathbf{Y}_0} \nabla_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}_0) : \mathbf{c}^{\varepsilon_0} : \nabla_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}_0) = 0 \quad (1.130)$$

toutes les fonctions étant périodiques en \mathbf{y} sur \mathbf{Y}_0 . Le tenseur $\mathbf{c}^{\varepsilon_0}$ étant présumé symétrique défini positif, on en déduit $\nabla_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}_0) = 0$ d'où $\sigma_{-1} = 0$ et $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t) = \langle \mathbf{u}_0 \rangle(\mathbf{x}, t)$. Ce dernier résultat correspond à notre intuition qu'à l'ordre 0, le champ de déplacement ne contient pas de petites variations ; il est insensible aux petites hétérogénéités.

– pour $(i, j) = (-1, 0)$ on a

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\sigma_0) = -\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\sigma_{-1}) = 0, \quad (1.131)$$

$$\sigma_0 = \mathbf{c}^{\varepsilon_0} : (\epsilon_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}_0) + \epsilon_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}_1)), \quad (1.132)$$

d'où le problème d'inconnue $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\mathbf{c}^{\varepsilon_0} : \epsilon_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}_1)) = -\nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\mathbf{c}^{\varepsilon_0} : \epsilon_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}_0)). \quad (1.133)$$

La dépendance de ce problème en $\epsilon_x(\mathbf{u}_0)$ est linéaire ce qui amène à chercher des solutions sous la forme

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \chi^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \epsilon_x(\mathbf{u}_0)(\mathbf{x}, t) + \langle \mathbf{u}_1 \rangle(\mathbf{x}, t), \quad (1.134)$$

où $\chi^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est un tenseur d'ordre 3 appelé correcteur d'ordre 1 et tel que $\langle \chi^{\varepsilon_0} \rangle = 0$.

En introduisant 1.134 dans 1.133 on obtient que χ^{ε_0} est solution dans \mathcal{V} du problème de cellule

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\mathbf{H}^{\varepsilon_0}) = 0, \quad (1.135)$$

$$\mathbf{H}^{\varepsilon_0} = \mathbf{c}^{\varepsilon_0} : \mathbf{G}^{\varepsilon_0}, \quad (1.136)$$

$$\mathbf{G}^{\varepsilon_0} = \mathbf{I} + \epsilon_{\mathbf{y}} \circ \chi^{\varepsilon_0}, \quad (1.137)$$

$$\langle \chi^{\varepsilon_0} \rangle = 0, \quad (1.138)$$

défini sur $\mathbf{Y}_{\mathbf{x}}$ avec condition de périodicité aux bords et où $\mathbf{H}^{\varepsilon_0}$ et $\mathbf{G}^{\varepsilon_0}$ sont des tenseurs intermédiaires d'ordre 4 et \mathbf{I} est le tenseur identité d'ordre 4.

Pour comprendre physiquement ce problème de statique, on peut le formuler en termes de force sous la forme indicielle suivante :

$$\nabla \cdot (\mathbf{c}^{\varepsilon_0} : \epsilon(\chi^{\varepsilon_0, mn})) = \mathbf{F}^{mn}, \quad (1.139)$$

$$\mathbf{F}^{mn} = -\nabla \cdot (\mathbf{c}^{\varepsilon_0} : e_m \otimes e_n), \quad (1.140)$$

$$\langle \chi^{\varepsilon_0} \rangle = 0, \quad (1.141)$$

où e_m et e_n désignent des vecteurs de la base canonique de l'espace, \otimes désigne le produit tensoriel. Sous cette forme, la résolution du problème de cellule correspond au calcul des déformations et contraintes associées pour tous les chargements statiques possibles $e_m \otimes e_n$. Le tenseur $\mathbf{G}^{\varepsilon_0}$ concentre alors en un seul tenseur toutes les déformations possibles et le tenseur $\mathbf{H}^{\varepsilon_0}$, toutes les contraintes associées.

En utilisant maintenant 1.134 dans 1.132 on obtient

$$\sigma_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \mathbf{H}^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \epsilon_x(\langle \mathbf{u}_0 \rangle)(\mathbf{x}, t). \quad (1.142)$$

En prenant la moyenne sur la cellule, on obtient alors la loi de comportement effective d'ordre 0

$$\langle \sigma_0^{\varepsilon_0} \rangle(\mathbf{x}, t) = \mathbf{c}^{*, \varepsilon_0} : \epsilon_x(\langle \mathbf{u}_0 \rangle)(\mathbf{x}, t) \quad \text{et} \quad (1.143)$$

$$\mathbf{c}^{*, \varepsilon_0} = \langle \mathbf{H}^{\varepsilon_0} \rangle. \quad (1.144)$$

– pour $(i, j) = (0, 1)$ on a

$$\rho^{\varepsilon_0} \ddot{\mathbf{u}}_0 - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\sigma_0) - \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\sigma_1) = \mathbf{f}, \quad (1.145)$$

$$\sigma_1 = \mathbf{c}^{\varepsilon_0} : (\epsilon_x(\mathbf{u}_1) + \epsilon_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}_2)). \quad (1.146)$$

En prenant la moyenne sur la cellule de 1.145, avec le fait que $\mathbf{u}_0 = \langle \mathbf{u}_0 \rangle(\mathbf{x}, t)$ et en prenant en compte la propriété 1.84, on obtient l'équation effective des ondes d'ordre 0

$$\langle \rho^{\varepsilon_0} \rangle \langle \ddot{\mathbf{u}}_0^{\varepsilon_0} \rangle - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \langle \sigma_0^{\varepsilon_0} \rangle = \mathbf{f}. \quad (1.147)$$

En arrêtant le développement à l'ordre 0, les relations 1.147 et 1.143 constituent alors les équations des ondes effectives (homogénéisées) d'ordre 0

$$\begin{aligned} \langle \rho^{\varepsilon_0} \rangle \langle \ddot{\mathbf{u}}_0^{\varepsilon_0} \rangle - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \langle \boldsymbol{\sigma}_0^{\varepsilon_0} \rangle &= \mathbf{f} \quad \text{et} \\ \langle \boldsymbol{\sigma}_0^{\varepsilon_0} \rangle (\mathbf{x}, t) &= \mathbf{c}^{*,\varepsilon_0} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{x}}(\langle \mathbf{u}_0 \rangle) (\mathbf{x}, t). \end{aligned}$$

Le fait qu'elles soient exactement de même forme que les équations des ondes originales mais utilisent les paramètres effectifs ($\rho^{*,\varepsilon_0} = \langle \rho^{\varepsilon_0} \rangle$, $\mathbf{c}^{*,\varepsilon_0} = \langle \mathbf{H}^{\varepsilon_0} \rangle$) permet d'utiliser le même solveur aux éléments spectraux pour résoudre en déplacement les équations des ondes. L'obtention du tenseur des contraintes d'ordre 0 complet nécessite cependant le calcul supplémentaire par la relation 1.142 et donc la connaissance supplémentaire du tenseur $\mathbf{H}^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

En termes de convergence, on a au minimum

$$\mathbf{u}^{\varepsilon_0, \varepsilon_0} = \mathbf{u}_0 + O(\varepsilon_0). \quad (1.148)$$

À 1D, on peut montrer qu'on a $\langle \mathbf{u}_1 \rangle = 0$ ce qui implique une convergence d'ordre supérieur

$$\mathbf{u}^{\varepsilon_0, \varepsilon_0} = \mathbf{u}_0 + O(\varepsilon_0^2). \quad (1.149)$$

À 2D, on n'a plus nécessairement $\langle \mathbf{u}_1 \rangle = 0$, mais il reste possible d'observer au cas-par-cas une convergence en ε_0^2 lorsque $\langle \mathbf{u}_1 \rangle$ reste suffisamment faible (exemple en Figure 1.10).

Construction de la paramétrisation initiale

La construction de la paramétrisation initiale ($\rho^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{c}^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$) doit permettre le développement théorique précédent, en particulier il faut que \mathbf{u}_0 , \mathbf{u}_1 et $\boldsymbol{\sigma}_0$ soient dans l'espace \mathcal{V} . Pour cela il est nécessaire que χ^{ε_0} et $\mathbf{H}^{\varepsilon_0}$ soient eux-mêmes dans \mathcal{V} . On cherche donc $\rho^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et $\mathbf{c}^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ tels que :

- $\rho^{\varepsilon_0}, \mathbf{H}^{\varepsilon_0}, \chi^{\varepsilon_0} \in \mathcal{V}$,
- $\rho^{\varepsilon_0}, \mathbf{c}^{\varepsilon_0}$ soient définis positifs,
- $\rho^{\varepsilon_0}\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_0}\right) = \rho(\mathbf{x})$ et $\mathbf{c}^{\varepsilon_0}\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_0}\right) = \mathbf{c}(\mathbf{x})$.

Pour construire ρ^{ε_0} , on commence par définir la fonction intermédiaire $\rho^{\varepsilon_0, s}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ définie par $\rho^{\varepsilon_0, s}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \rho(\varepsilon_0 \mathbf{y})$ sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbf{Y}_{\mathbf{x}}$ et étendue sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ par $\mathbf{Y}_{\mathbf{x}}$ -périodicité en \mathbf{y} ; on a donc $\rho^{\varepsilon_0, s} \in \mathcal{T}$. En définissant

$$\rho^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathcal{F}^{\lambda_0}(\rho^{\varepsilon_0, s})\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_0}\right) + \left(\rho^{\varepsilon_0, s} - \mathcal{F}^{\lambda_0}(\rho^{\varepsilon_0, s})\right)(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (1.150)$$

on a bien $\rho^{\varepsilon_0} \in \mathcal{T}$ et $\rho^{\varepsilon_0}\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_0}\right) = \rho(\mathbf{x})$ est immédiat. Le filtre étant idéalement idempotent (relation 1.95), on a de plus $\mathcal{F}^{\lambda_0}(\rho^{\varepsilon_0, s} - \mathcal{F}^{\lambda_0}(\rho^{\varepsilon_0, s})) = 0$ donc $\mathcal{F}^{\lambda_0}(\rho^{\varepsilon_0}) = \mathcal{F}^{\lambda_0}(\rho^{\varepsilon_0, s})$. Le filtre étant passe-bas on a $\langle \rho^{\varepsilon_0, s} - \mathcal{F}^{\lambda_0}(\rho^{\varepsilon_0, s}) \rangle = 0$ donc $\langle \rho^{\varepsilon_0} \rangle = \langle \mathcal{F}^{\lambda_0}(\rho^{\varepsilon_0, s})\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_0}\right) \rangle = \mathcal{F}^{\lambda_0}(\rho^{\varepsilon_0, s})\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_0}\right)$, d'où $\rho^{\varepsilon_0} \in \mathcal{V}$. La fonction $\rho^{\varepsilon_0, s}$ est strictement positive par construction et pour un type bien choisi

d'ondelette de filtrage, ρ^{ε_0} est aussi strictement positive. Enfin, on peut remarquer qu'avec une telle construction, la densité effective se calcule indifféremment avec l'opérateur de moyennage ou l'opérateur de filtrage

$$\rho^{*,\varepsilon_0} = \langle \rho^{\varepsilon_0} \rangle = \mathcal{F}^{\lambda_0}(\rho^{\varepsilon_0}). \quad (1.151)$$

Pour construire $\mathbf{c}^{\varepsilon_0}$ la procédure est plus complexe et s'appuie sur le procédé d'homogénéisation de Papanicolaou et Varadhan (1979). L'idée consiste à construire $\mathbf{c}^{\varepsilon_0}$ à partir des tenseurs intermédiaires $\mathbf{G}^{\varepsilon_0}$ et $\mathbf{H}^{\varepsilon_0}$ construits dans \mathcal{V} tels que définis dans le problème de cellule (1.135-1.138)

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\mathbf{H}^{\varepsilon_0}) = 0, \quad (1.152)$$

$$\mathbf{H}^{\varepsilon_0} = \mathbf{c}^{\varepsilon_0} : \mathbf{G}^{\varepsilon_0}, \quad (1.153)$$

$$\mathbf{G}^{\varepsilon_0} = \mathbf{I} + \epsilon_{\mathbf{y}} \circ \chi^{\varepsilon_0}, \quad (1.154)$$

$$\langle \chi^{\varepsilon_0} \rangle = 0. \quad (1.155)$$

De même que pour la densité, on commence par définir le tenseur intermédiaire $\mathbf{c}^{\varepsilon_0,s}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ défini par $\mathbf{c}^{\varepsilon_0,s}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{c}(\varepsilon_0 \mathbf{y})$ sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbf{Y}_{\mathbf{x}}$ et étendu sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ par $\mathbf{Y}_{\mathbf{x}}$ -périodicité en \mathbf{y} ; on a donc $\mathbf{c}^{\varepsilon_0,s} \in \mathcal{T}$. Pour chaque $\mathbf{Y}_{\mathbf{x}}$ et en utilisant $\mathbf{c}^{\varepsilon_0,s}$ dans le problème de cellule défini par les relations 1.135 à 1.138, on définit le correcteur initial $\chi^{\varepsilon_0,s}$ ainsi que les tenseurs $\mathbf{G}^{\varepsilon_0,s}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et $\mathbf{H}^{\varepsilon_0,s}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ correspondants. On construit alors les tenseurs $\mathbf{G}^{\varepsilon_0}$ et $\mathbf{H}^{\varepsilon_0}$ définis sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbf{Y}_{\mathbf{x}}$ par

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \mathbf{I} + \left[\left(\mathbf{G}^{\varepsilon_0,s} - \mathcal{F}^{\lambda_0}(\mathbf{G}^{\varepsilon_0,s}) \right)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] : \\ &\quad \left[\mathcal{F}^{\lambda_0}(\mathbf{G}^{\varepsilon_0,s}) \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_0} \right) \right]^{-1} \end{aligned} \quad (1.156)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \left[\left(\mathbf{H}^{\varepsilon_0,s} - \mathcal{F}^{\lambda_0}(\mathbf{H}^{\varepsilon_0,s}) \right)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathcal{F}^{\lambda_0}(\mathbf{H}^{\varepsilon_0,s}) \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_0} \right) \right] : \\ &\quad \left[\mathcal{F}^{\lambda_0}(\mathbf{G}^{\varepsilon_0,s}) \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_0} \right) \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (1.157)$$

et étendus sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ par périodicité (ils sont donc par construction dans \mathcal{T}). On retrouve exactement de la même manière que pour la densité que $\mathbf{G}^{\varepsilon_0}$ et $\mathbf{H}^{\varepsilon_0}$ sont en fait dans \mathcal{V} . L'inversibilité du tenseur $\mathcal{F}^{\lambda_0}(\mathbf{G}^{\varepsilon_0,s}) \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_0} \right)$ n'est, à ma connaissance, pas prouvée théoriquement. Ayant $\langle \mathbf{G}^{\varepsilon_0,s} \rangle = \mathbf{I}$, cette inversibilité semble cependant se dessiner intuitivement par dominance de la diagonale (critère de Hadamard) au moins pour un filtrage passe-bas suffisamment décimateur. En pratique, cette inversibilité se vérifie numériquement. Enfin, on déduit de la relation 1.136 la construction de $\mathbf{c}^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ par

$$\mathbf{c}^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{H}^{\varepsilon_0} : (\mathbf{G}^{\varepsilon_0})^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (1.158)$$

Encore une fois pour un type d'ondelette bien choisi, le tenseur $\mathbf{c}^{\varepsilon_0}$ reste défini positif. Il reste alors à vérifier qu'une telle construction permet bien la définition d'un correcteur χ^{ε_0} dans \mathcal{V} vérifiant 1.154. La relation 1.154

exprimant en fait que $\mathbf{G}^{\varepsilon_0}$ dérive d'un potentiel il suffit, en utilisant le rotationnel, de vérifier que $\nabla_{\mathbf{y}} \times \mathbf{G}^{\varepsilon_0} = 0$. La commutativité des opérateurs de filtrage et de rotationnel, la relation 1.156 et le fait que $\mathbf{G}^{\varepsilon_0, S}$ est lui-même défini à partir d'un problème de cellule, donc dérive d'un potentiel par construction, assurent finalement ce résultat. L'existence d'un tenseur χ^{ε_0} vérifiant 1.154 est donc assurée et $\mathbf{G}^{\varepsilon_0}$ étant dans \mathcal{V} et ayant par construction $\langle \chi^{\varepsilon_0} \rangle = 0$, χ^{ε_0} est aussi dans \mathcal{V} par stabilité de \mathcal{V} par intégration. Finalement, grâce à 1.157, on observe que

$$\mathbf{c}^{*, \varepsilon_0}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{H}^{\varepsilon_0} \rangle(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{\lambda_0}(\mathbf{H}^{\varepsilon_0, S}) : \left(\mathcal{F}^{\lambda_0}(\mathbf{G}^{\varepsilon_0, S}) \right)^{-1} \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_0} \right). \quad (1.159)$$

Ceci permet notamment d'assurer les petites symétries du tenseur élastique effectif. La conservation de la grande symétrie est en revanche un résultat théorique toujours à démontrer. En pratique cette symétrie semble plus ou moins bien respectée numériquement (on a usuellement une erreur de symétrie de l'ordre de quelques pourcents au maximum).

Enfin, cette dernière construction montre que les quantités physiques à filtrer sont l'ensemble des déformations $\mathbf{G}^{\varepsilon_0, S}$ et leurs contraintes associées $\mathbf{H}^{\varepsilon_0, S}$ calculées à partir du tenseur élastique initial défini aux petites échelles. Le tenseur élastique effectif se construit alors par recombinaison de ces quantités filtrées, c'est-à-dire sous forme de recombinaison basse fréquence.

Homogénéisation numérique

Grâce aux relations 1.151 et 1.159, l'obtention des paramètres élastiques effectifs s'effectue en quelques étapes simples.

1. On définit la cellule de périodicité \mathbf{Y}_0 comme étant tout le domaine Ω ce qui permet de n'avoir à résoudre qu'un seul problème de cellule initial sur tout le domaine. On résout alors numériquement un tel problème par une méthode d'éléments finis définis de degré moyen (entre P2 et P6) sur un maillage à base triangulaire (donc facile à mailler). Les tenseurs $\mathbf{H}^{\varepsilon_0, S}$ et $\mathbf{G}^{\varepsilon_0, S}$ sont alors construits.
2. Le paramètre λ_0 étant défini, l'ondelette de filtrage est dimensionnée et on filtre la densité ρ^{ε_0} et les tenseurs $\mathbf{H}^{\varepsilon_0, S}$ et $\mathbf{G}^{\varepsilon_0, S}$. Les tenseurs filtrés sont définis sur une grille régulière dont le pas dépend de λ_0 (pour une utilisation avec interpolation par splines on prend généralement un pas de l'ordre de $\lambda_0/9$).
3. la densité effective étant directement obtenue par le filtrage, le tenseur effectif est formé grâce à la relation 1.159. Le tenseur effectif est alors continûment défini sur la même grille régulière que précédemment et les valeurs intermédiaires peuvent être obtenue par interpolation (linéaire, splines, ...) sur cette grille.

Homogénéisation et maillage de la méthode SEM

Lorsque les propriétés élastiques du milieu sont constantes par morceaux sur le domaine Ω , on cherche à construire un maillage éléments spectraux à base de quadrangles pour lequel les propriétés sont

constantes sur chaque élément. On s'intéresse ici à la taille Δ (éventuellement variable) des éléments du maillage. Pour un maillage uniforme, Δ est constant et représente le pas du maillage; dans le cas d'un maillage quelconque Δ représente une longueur caractéristique des éléments du maillage, par exemple la plus grande dimension de l'élément. Dans le cas d'un milieu quelconque, la définition des éléments du maillage dépend à la fois de la géométrie du milieu (ses discontinuités) et des plus petites longueurs d'ondes s'y propageant. En dehors des restrictions géométriques et lorsque chaque élément possède des propriétés élastiques constantes, une règle empirique estime que la méthode des éléments spectraux avec des éléments de degré 8 échantillonne correctement le champ d'ondes lorsque chaque élément contient au plus deux longueurs d'ondes minimales λ_m le traversant. Cette longueur d'onde minimale est locale à l'élément et ne doit pas être confondue avec la longueur d'onde minimale λ_{min} du champ d'onde globale à l'ensemble du domaine. Un estimateur initial grossier Δ_i de la taille optimale des éléments du maillage est alors obtenu en utilisant la longueur d'onde minimale λ_{min} du champ d'onde sur l'ensemble du domaine

$$\Delta_i = 2\lambda_{min} = 2 \frac{V_{S_{min}}}{f_c}, \quad (1.160)$$

où f_c est la fréquence de coin de la source et $V_{S_{min}}$ est la vitesse minimale des ondes S sur l'ensemble du domaine, les ondes S étant ici considérées comme les ondes se propageant le plus lentement dans le milieu. Un tel maillage, défini seulement à l'aide de la vitesse minimale globale, n'exploite pas la variabilité des vitesses des ondes sur le domaine et correspond donc à un potentiellement fort sur-échantillonnage des ondes dans certaines zones du domaine lorsque V_S varie beaucoup spatialement. Par exemple pour une source de fréquence de coin $f_c = 10 \text{ Hz}$ et un domaine rectangulaire de 10 km de profondeur pour lequel la vitesse d'ondes S est de 1000 m/s sur les 3 premiers kilomètres et de 2000 m/s sur les 3 derniers kilomètres, un maillage uniforme optimal aurait pour pas constant $\Delta_i = 2 \times \frac{1000}{10} = 200 \text{ m}$. Ce maillage échantillonnerait correctement les ondes en surface mais sur-échantillonnerait d'un facteur 2 dans chaque direction d'espace les ondes dans la partie la plus profonde, augmentant inutilement le nombre d'éléments donc le temps de calcul (à 2D on aurait un facteur $2^{2+1} = 8$ sur le temps de calcul). Il est alors avantageux d'utiliser un maillage non structuré, potentiellement plus difficile à construire uniquement avec des quadrangles, dont la taille optimale Δ_0 des éléments varie et prend en compte seulement la vitesse minimale locale des ondes

$$\Delta_0(\mathbf{x}) \sim 2\lambda_m(\mathbf{x}) = 2 \frac{V_S(\mathbf{x})}{f_c}, \quad (1.161)$$

où V_S désigne la vitesse des ondes S. Nous supposons dans la suite de ce paragraphe que le maillage du domaine est effectivement idéal au sens de la relation 1.161.

Lorsque l'on homogénéise un tel milieu, les paramètres élastiques obtenus sont continus, *a priori* hétérogènes, et ne contiennent pas d'oscillations de longueur d'onde plus petite que λ_0 . Si le nouveau maillage n'a

plus besoin de suivre les discontinuités du milieu initial, il n'est cependant pas possible de définir un maillage pour lequel les paramètres du milieu sont constants sur chaque élément. Le nouveau maillage devra alors prendre en compte ces oscillations du milieu. De plus, il est intuitif que comparativement au maillage du milieu initial, les variations du milieu ainsi introduites viennent augmenter la quantité d'oscillations que supporte chaque élément, les éléments les plus larges contenant une plus grande contribution de ces oscillations du milieu. Comparativement au maillage initial donc, il convient d'envisager une adaptation de la taille Δ des éléments du maillage utilisé, cette adaptation étant fonction de λ_0 . Nous exposons ici un raisonnement (non strictement rigoureux) dont l'objectif est d'obtenir une estimation de cette adaptation pour la construction du maillage effectif.

Pour plus de simplicité on se place en 1D et on considère le terme intégral correspondant à la contribution d'un élément à la matrice de masse de la méthode des éléments spectraux

$$\int_{\Omega_e} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{w} dV, \quad (1.162)$$

où ρ désigne la densité de masse, \mathbf{u} le vecteur position inconnu, \mathbf{w} un vecteur test oscillant de la même manière que le champ inconnu et Ω_e est un élément du maillage. On négligera par la suite la dérivation temporelle car elle n'impacte pas le raisonnement, ainsi du point de vue des oscillations ce terme se comporte comme

$$\int_{\Omega_e} \rho |\mathbf{u}|^2 dV. \quad (1.163)$$

Dans le cas homogène, ρ est constant et, considérant que \mathbf{u} décrit l'onde locale de plus petite longueur d'onde $\lambda_m = \frac{V_s}{f_c}$ sur cet élément comme une onde plane, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \exp\left(2\pi i \frac{x}{\lambda_m}\right)$, l'intégrande de 1.163 oscille alors en $\frac{\lambda_m}{2}$ pour une taille de Ω_e de dx_0 .

Dans le cas du milieu homogénéisé, $\rho = \rho^{*,\varepsilon_0}$ contient des oscillations dont la plus petite longueur caractéristique correspond à la longueur d'onde de coupure λ_0 du filtre d'homogénéisation. Si ρ ne contient pas nécessairement des oscillations de longueur caractéristique λ_0 , il s'agit cependant du cas limite le plus restrictif pour notre raisonnement. En effet, en considérant qu'il s'agit également d'une oscillation pure $\rho = \rho_0 \exp\left(2\pi i \frac{x}{\lambda_0}\right)$, λ_0 correspond à la plus petite période d'oscillation donc au plus grand nombre d'oscillations par unité de longueur. L'intégrande de 1.163 oscille alors en $\left(\frac{2}{\lambda_m} + \frac{1}{\lambda_0}\right)^{-1} = \frac{\lambda_m}{2} \left(1 + \frac{\lambda_m}{2\lambda_0}\right)^{-1}$. Par proportionnalité (non justifiée, mais on ne cherche ici qu'un estimateur), la taille de l'élément Ω_e doit alors être

$$\Delta = \frac{\Delta_0}{1 + \frac{\lambda_m}{2\lambda_0}}. \quad (1.164)$$

Dans la zone la plus lente, on a $\lambda_m = \lambda_{min}$, d'où

$$\Delta = \frac{\Delta_0}{1 + \frac{1}{2\varepsilon_0}}, \quad (1.165)$$

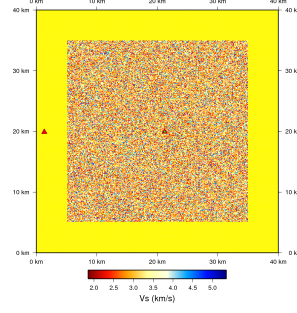


FIGURE 1.7 – Vitesse V_S d'ondes S dans le milieu original (Figure issue de Capdeville et al. 2010b)

où ε_0 correspond au paramètre d'homogénéisation. Le facteur de contraction $1 + \frac{\lambda_m}{2\lambda_0}$ de la relation 1.164 est décroissant avec λ_m , ce qui correspond au raisonnement heuristique précédent : plus les éléments du maillage initial étaient larges et plus la restriction imposée par la condition 1.164 doit être importante. De plus, de même que λ_m décrit la plus petite longueur d'onde locale, le rapport $\varepsilon_0 = \frac{\lambda_0}{\lambda_m}$ correspond à une description locale du paramètre d'homogénéisation ε_0 et la relation 1.164 se réécrit

$$\Delta = \frac{\Delta_0}{1 + \frac{1}{2\varepsilon_0}}, \quad (1.166)$$

où ε_0 varie avec la position et respecte la contrainte $\varepsilon_0 < \varepsilon_0$. Le facteur de contraction de 1.165 obtenu en fonction du paramètre d'homogénéisation ε_0 correspond alors à un facteur minimal de contraction, et il est possible de ne raisonner que sur ce rapport en première approximation.

Dans le cas rhétorique de l'homogénéisation d'un milieu initialement homogène, on peut prendre ε_0 infiniment grand et l'on retrouve $\Delta = \Delta_0$. Dans le cas d'un milieu initial hétérogène et d'une paramétrisation $\varepsilon_0 = 0.5$ (le milieu homogénéisé oscille au plus comme la moitié de la longueur d'onde minimale) le maillage initial doit être raffiné d'un facteur 2, $\Delta = \frac{\Delta_0}{2}$.

Validation de l'homogénéisation sur un milieu aleatoire 2D

On reprend ici les tests effectués dans Capdeville et al. (2010b). L'homogénéisation déterministe non périodique est ici testée sur un milieu élastique en carré de 30 km de côté possédant des éléments carrés de 100 m de côté dans lesquels les paramètres élastiques sont constants isotropes mais tirés aléatoirement (Figure 1.7). Ce milieu aléatoire est entouré d'un milieu homogène isotrope de 5 km d'épaisseur pour lesquels les vitesses d'ondes P et d'ondes S sont respectivement de 5 km/s et 3.2 km/s et de densité 3000 kg.m^{-3} . Dans le carré intérieur, les paramètres élastiques sont tirés aléatoirement avec un contraste de $\pm 50\%$ par rapport aux paramètres de la bande extérieure. La fréquence centrale utilisée pour la source est de 1.5 Hz ce qui permet d'estimer la longueur d'onde minimale du champ d'onde à $\lambda_m \simeq 800\text{ m}$. La source est située dans la zone homogène à gauche (triangle rouge) du domaine aléatoire, le récepteur (triangle vert) est situé au coeur de la zone aléatoire. Le milieu homogénéisé est alors

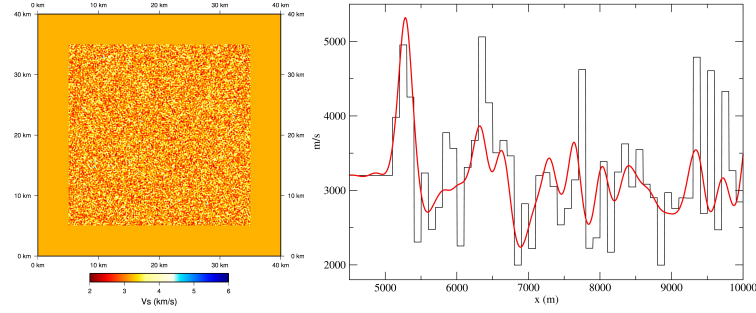


FIGURE 1.8 – Vitesse $V_S^{*,\varepsilon_0} = \sqrt{\frac{c_{2222}^{*,\varepsilon_0}}{\rho^{*,\varepsilon_0}}}$ d'ondes S dans le milieu homogénéisé (gauche) et coupes horizontales à $x_2 = 32$ km en fonction de x_1 de V_S (noir) et V_S^{*,ε_0} (rouge) (Figures issues de Capdeville et al. 2010b)

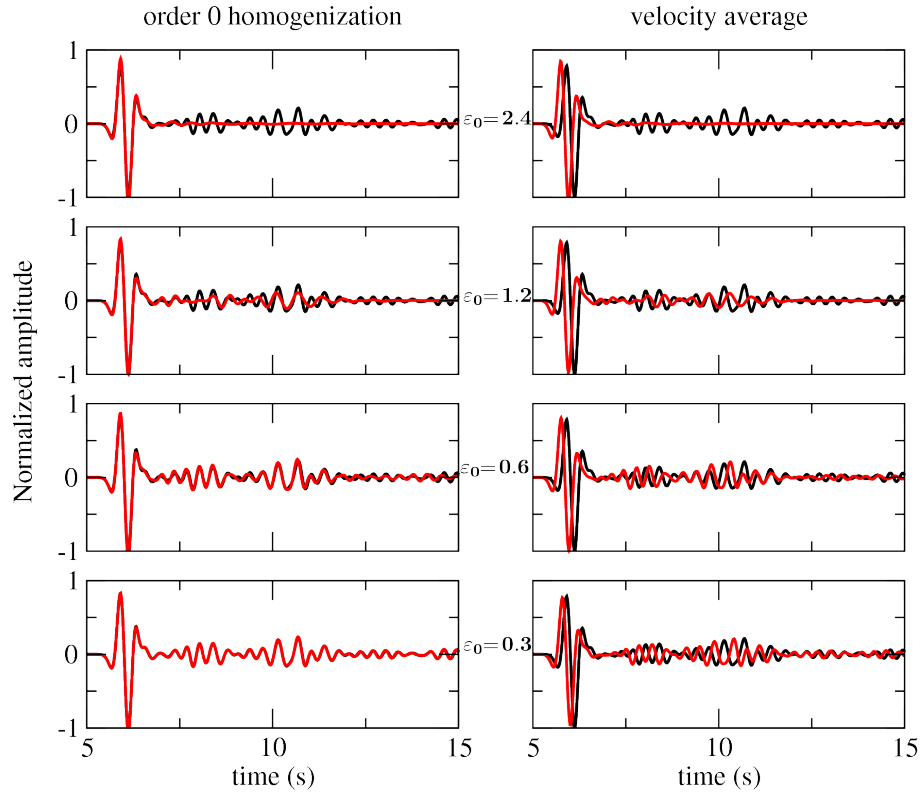


FIGURE 1.9 – Traces de vitesse (composante x_1) pour la solution de référence (noir) la solution homogénéisée d'ordre 0 (rouge gauche) et le milieu simplement filtré en vitesse (rouge droite) pour différentes valeurs de ε_0 . (Figure issue de Capdeville et al. 2010b)

continu (Figure 1.8).

Tous les tirs sont effectués à partir du code d'éléments spectraux mailant chaque hétérogénéité. Le tir dans le milieu original sert de référence \mathbf{u}^{ref} . Dans la Figure 1.9, on lui compare le tir dans le milieu homogénéisé pour divers ε_0 et le tir dans un milieu obtenu à partir du filtrage sur la densité et les vitesses d'ondes P et d'ondes S pour ces mêmes ε_0 . Les sismogrammes issus du tir homogénéisé convergent vers la référence lorsque ε_0 diminuent. En revanche, ce n'est pas le cas, même pour l'onde balistique à partir du milieu simplement filtré.

Afin d'évaluer la convergence des procédures envisagées (procédure d'homogénéisation, utilisation d'un simple filtrage, ...) en fonction de ε_0 on calcule l'erreur en vitesse $E_i(\dot{\mathbf{u}})$ en un récepteur i , pour $i \in (1, N_{rec})$

$$E_i(\dot{\mathbf{u}}) = \sqrt{\frac{\int_0^{t_{max}} \|\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}^{ref}\|^2(\mathbf{x}_i, t) dt}{\int_0^{t_{max}} \|\dot{\mathbf{u}}^{ref}\|^2(\mathbf{x}_i, t) dt}}, \quad (1.167)$$

puis l'erreur totale $E(\dot{\mathbf{u}})$ par la moyenne sur tous les récepteurs

$$E(\dot{\mathbf{u}}) = \frac{1}{N_{rec}} \sum_{i=1}^{N_{rec}} E_i(\dot{\mathbf{u}}). \quad (1.168)$$

Par la suite, on fera référence à cette erreur moyenne sous le terme générique d'erreur dans le cas d'une étude de convergence en fonction de ε_0 , sauf cas contraire explicite.

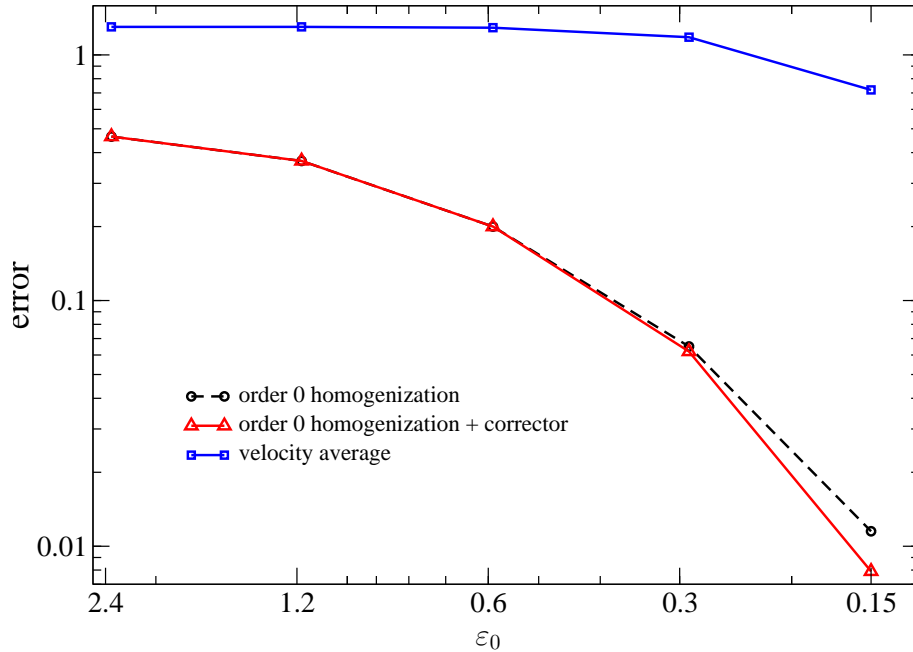


FIGURE 1.10 – Courbe d'erreur entre la solution homogénéisée à l'ordre 0 et la solution de référence en fonction du paramètre ε_0 (Figure issue de Capdeville et al. 2010b)

La courbe d'erreur en fonction de ε_0 montrée en Figure 1.10 montre donc finalement la rapidité de convergence obtenue pour la méthode de filtrage simple sur les vitesses et pour la méthode d'homogénéisation d'ordre 0. La méthode de filtrage direct montre une très pauvre convergence.

En revanche, dans ce cas test, on obtient un régime de convergence en ε_0^2 pour l'homogénéisation d'ordre 0.

APPROXIMATION ACOUSTIQUE DES ONDES ÉLASTIQUES EN MILIEUX HÉTÉROGÈNES

INTRODUCTION

Les hypothèses de l'acoustique linéaire suggèrent une relativement faible variabilité spatiale des paramètres acoustiques ρ et κ , c'est-à-dire qu'elles imposent physiquement un milieu de propagation aux propriétés plutôt homogènes. Mathématiquement cependant, il est possible d'utiliser les équations de l'acoustique avec des milieux hétérogènes. Cette approche est alors doublement motivée.

D'une part il est toujours possible de s'intéresser aux comportements limites de systèmes d'équations. Ainsi on peut s'intéresser au comportement limite aux grandes longueurs d'ondes des équations de l'acoustique. Dans un tel cadre, les variations du milieu devenant petites comparativement aux longueurs d'ondes concernées, quel est l'effet des petites hétérogénéités sur le champ d'ondes ? Comment peut-on homogénéiser les ondes acoustiques ?

L'étude du comportement aux grandes longueurs d'ondes de la propagation d'ondes acoustiques dans des milieux hétérogènes, n'est pas une idée nouvelle. Cependant, ces études portent généralement sur des milieux partiellement fluides comme les milieux poreux (Hornung 1992; 1997, par exemple) ou bien des milieux fluides possédant des inclusions métalliques suivant une géométrie particulière (« sonic crystals », de Hoop 1995, Cummer et Schurig 2007, Torrent et Sánchez-Dehesa 2008, Schoenberg 1984).

Pour notre part, nous nous intéressons à l'homogénéisation des équations de l'acoustique, c'est-à-dire à la propagation des ondes dans des fluides hétérogènes. De par leur grande similarité formelle avec les équations des ondes élastiques, la procédure d'homogénéisation non périodique pour les ondes élastiques s'adapte très bien aux équations de l'acoustique. Cette adaptation théorique, et la vérification numérique de son bon comportement (après implémentation) constitue la première partie de ce chapitre.

D'autre part, il arrive souvent dans le domaine de la simulation numérique d'effectuer des approximations visant un gain précis. En l'occurrence l'utilisation d'approximations acoustiques pour la

propagation des ondes élastiques (ondes P) est parfois utilisée en géophysique tant pour le problème direct (Alkhalifah 1998; 2000, ...) que pour le problème inverse (Etgen et al. 2009, Virieux et Operto 2009, ...). En effet, les équations de l'acoustique sont beaucoup plus simples et rapides à résoudre que celles de l'élastique et offrent une quantité de paramètres (à inverser, par exemple) moins importante. Cependant, si de telles approximations se justifient dans le cas de milieux homogènes isotropes, il est bien connu que, pour des milieux hétérogènes et/ou anisotropes, les approximations acoustiques soulèvent un certain nombre de difficultés, notamment l'impossibilité de modéliser les conversions entre ondes P et ondes S aux interfaces (Alkhalifah 1998; 2000, par exemple).

Nous étudions ici la question des effets des petites échelles sur la précision de l'approximation des ondes P élastiques par les solutions des équations de l'acoustique. Nous avons alors utilisé la théorie de l'homogénéisation pour expliquer les résultats. Cette étude correspond à la deuxième partie de ce chapitre et est restituée sous la forme de la publication (en cours de soumission et dont je suis le premier auteur) dont elle fait l'objet.

On trouvera enfin dans une courte troisième partie quelques cas et développements théoriques complémentaires.

2.1 HOMOGÉNÉISATION DES ONDES ACOUSTIQUES

2.1.1 Homogénéisation non périodique : adaptation de la théorie élastique

Étant donné que les équations des ondes élastiques et acoustiques sont des équations d'ondes formellement similaires, il semble intuitif que la méthode d'homogénéisation non périodique des ondes élastiques décrite au paragraphe 1.3.4 puisse aisément s'adapter aux équations de l'acoustique. Étant donné que l'on peut considérer mathématiquement les équations de l'acoustique comme un cas particulier des équations d'ondes élastiques pour les ondes SH, on peut utiliser la procédure d'homogénéisation définie par Guillot et al. (2010) en tant qu'adaptation aux équations de l'acoustique de l'homogénéisation déterministe non périodique telle que définie dans Capdeville et al. (2010a;b). Nous en explicitons cependant ici le processus dans le cadre général et en précisant l'adaptation nécessaire pour l'application aux équations d'ondes acoustiques.

En considérant les équations d'ondes de champs d'inconnues le potentiel scalaire q et le vecteur déplacement \mathbf{u}

$$\frac{1}{\kappa} \ddot{q} - \nabla \cdot (\mathbf{u}) = g \quad \text{et} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{L} \cdot \nabla(q), \quad (2.2)$$

où κ est une grandeur scalaire, \mathbf{L} est un tenseur d'ordre 2 défini positif et g est un terme source, on constate que les équations d'ondes acoustiques

correspondent au cas particulier où \mathbf{L} est le *tenseur de densité*

$$\mathbf{L} = \frac{1}{\rho} \mathbf{I}, \quad (2.3)$$

où ρ est la densité et \mathbf{I} est le tenseur identité d'ordre 2. On dérive alors la procédure d'homogénéisation acoustique à partir du cas plus général utilisant le tenseur \mathbf{L} . Pour une longueur d'onde minimale λ_m fixée, et partant du problème acoustique (à nouveau noté S) défini par les équations (2.1-2.2) d'inconnues le potentiel de déplacement et le déplacement $(q, \mathbf{u})(\mathbf{x})$ et de paramètres $(\kappa, \mathbf{L})(\mathbf{x})$ définis à une petite échelle devant λ_m , on cherche à obtenir, en suivant le formalisme défini en 1.3.4, les équations effectives S^*

$$\frac{1}{\kappa^*} \ddot{q} - \nabla \cdot (\mathbf{u}^*) = g, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{L}^* \cdot \nabla(q^*), \quad (2.5)$$

$$(2.6)$$

décrivant l'approximation effective (à nouveau d'ordre 0) des équations de propagation des ondes acoustiques.

Problème théorique d'homogénéisation

On suppose à nouveau défini le paramètre de contrôle λ_0 définissant la taille maximale des hétérogénéités à homogénéiser. Les petits paramètres ε et ε_0 , avec $\varepsilon = \frac{\lambda}{\lambda_m} \leq \varepsilon_0 = \frac{\lambda_0}{\lambda_m}$, sont donc à nouveau définis et ε_0 est fixé. Les variables rapides \mathbf{y} sont introduites par 1.106 et sont considérées comme indépendantes des variables lentes \mathbf{x} ; les transformations sur les opérateurs de dérivation sont identiques que précédemment; les définitions des cellules d'échantillonnage, de l'opérateur de filtrage $\mathcal{F}^{\lambda_0}()$ et des espaces fonctionnels \mathcal{T} et \mathcal{V} restent inchangées. On suppose à nouveau qu'il a été possible de construire à partir de $(\kappa, \mathbf{L})(\mathbf{x})$ une paramétrisation initiale $(\kappa^{\varepsilon_0}, \mathbf{L}^{\varepsilon_0})(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ définie dans \mathcal{T} telle que

$$\kappa^{\varepsilon_0} \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_0} \right) = \kappa(\mathbf{x}), \quad (2.7)$$

$$\mathbf{L}^{\varepsilon_0} \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_0} \right) = \mathbf{L}(\mathbf{x}). \quad (2.8)$$

Nous laissons à nouveau la définition d'une telle construction pour un paragraphe ultérieur. La suite de paramètres virtuels $(\kappa^{\varepsilon, \varepsilon_0}, \mathbf{L}^{\varepsilon, \varepsilon_0})(\mathbf{x})$ indexés par ε peut alors être naturellement définie par

$$\kappa^{\varepsilon, \varepsilon_0}(\mathbf{x}) = \kappa^{\varepsilon_0} \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right), \quad (2.9)$$

$$\mathbf{L}^{\varepsilon, \varepsilon_0}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}^{\varepsilon_0} \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right), \quad (2.10)$$

ce qui permet d'obtenir la suite de problèmes $S^{\varepsilon, \varepsilon_0}$

$$\frac{1}{\kappa^{\varepsilon_0}} \ddot{q}^{\varepsilon, \varepsilon_0} - \nabla \cdot (\mathbf{u}^{\varepsilon, \varepsilon_0}) = g, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{u}^{\varepsilon, \varepsilon_0} = \mathbf{L}^{\varepsilon_0} \cdot \nabla(q^{\varepsilon, \varepsilon_0}). \quad (2.12)$$

Les inconnues sont de nouveau recherchées sous forme de séries entières en ε

$$q^{\varepsilon, \varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \sum_{i \geq 0} \varepsilon^i q_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \quad (2.13)$$

$$\mathbf{u}^{\varepsilon, \varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \sum_{j \geq -1} \varepsilon^j \mathbf{u}_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \quad (2.14)$$

où chaque fonction q_i et \mathbf{u}_j est à nouveau dans \mathcal{V} .

Résolution du problème théorique d'homogénéisation

L'introduction des séries (2.13-2.14) dans (2.11-2.11), avec (1.114-1.115) et identification des coefficients de chaque puissance de ε définit la série de problèmes indicés par i et j

$$\frac{1}{\kappa^{\varepsilon_0}} \ddot{q}_i - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{u}_i) - \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\mathbf{u}_{i+1}) = g \delta_{i0}, \quad \forall i \geq -2 \quad \text{et} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{L}^{\varepsilon_0} \cdot [\nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}_j) + \nabla_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}_{j+1})], \quad \forall j > -1. \quad (2.16)$$

La résolution itérée donne :

– pour $(i, j) = (-2, -1)$ on a

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\mathbf{u}_{-1}) = 0, \quad (2.17)$$

$$\mathbf{u}_{-1} = \mathbf{L}^{\varepsilon_0} \cdot \nabla_{\mathbf{y}}(q_0). \quad (2.18)$$

Par la même intégration du produit du second membre de 2.18 par $\nabla_{\mathbf{y}}(q_0)$ sur la cellule et l'utilisation du fait que $\mathbf{L}^{\varepsilon_0}$ est défini positif, on obtient alors $\nabla_{\mathbf{y}}(q_0) = 0$, d'où $q_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = q_0(\mathbf{x}, t) = \langle q_0 \rangle(\mathbf{x}, t)$ et $\mathbf{u}_{-1} = 0$. Le potentiel scalaire n'est pas sensible aux petites hétérogénéités à l'ordre 0.

– pour $(i, j) = (-1, 0)$ on a

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\mathbf{u}_0) = -\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{u}_{-1}) = 0, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{L}^{\varepsilon_0} \cdot (\nabla_{\mathbf{x}}(q_0) + \nabla_{\mathbf{y}}(q_1)), \quad (2.20)$$

d'où le problème d'inconnue $q_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\mathbf{L}^{\varepsilon_0} \cdot \nabla_{\mathbf{y}}(q_1)) = -\nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\mathbf{L}^{\varepsilon_0} : \nabla_{\mathbf{x}}(q_0)), \quad (2.21)$$

dont la linéarité en $\nabla_{\mathbf{x}}(q_0)$ amène à chercher des solutions de la forme

$$q_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = {}^T \chi^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}(q_0)(\mathbf{x}, t) + \langle q_1 \rangle(\mathbf{x}, t), \quad (2.22)$$

où le correcteur d'ordre 1, $\chi^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, est désormais un vecteur (tenseur d'ordre 1) et respecte toujours la condition $\langle \chi^{\varepsilon_0} \rangle = 0$.

Le problème de cellule défini sur $\mathbf{Y}_{\mathbf{x}}$ est alors

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\mathbf{P}^{\varepsilon_0}) = 0, \quad (2.23)$$

$$\mathbf{P}^{\varepsilon_0} = \mathbf{L}^{\varepsilon_0} \cdot \mathbf{Q}^{\varepsilon_0}, \quad (2.24)$$

$$\mathbf{Q}^{\varepsilon_0} = \mathbf{I} + \nabla_{\mathbf{y}} \chi^{\varepsilon_0}, \quad (2.25)$$

$$\langle \chi^{\varepsilon_0} \rangle = 0, \quad (2.26)$$

avec condition de périodicité aux bords, où $\mathbf{P}^{\varepsilon_0}$ et $\mathbf{Q}^{\varepsilon_0}$ sont les tenseurs intermédiaires cette fois d'ordre 2 et $\nabla_{\mathbf{y}}\chi^{\varepsilon_0}$ représente la matrice jacobienne de χ^{ε_0} , $(\nabla_{\mathbf{y}}\chi^{\varepsilon_0})_{ij} = \frac{\partial \chi_i^{\varepsilon_0}}{\partial y_j}$.

En utilisant 2.22 dans 2.20 dont on prend la moyenne sur la cellule, on obtient à nouveau la loi de comportement effective d'ordre 0

$$\langle \mathbf{u}_0^{\varepsilon_0} \rangle (\mathbf{x}, t) = \mathbf{L}^{*,\varepsilon_0} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}(\langle q_0 \rangle) (\mathbf{x}, t), \quad (2.27)$$

où $\mathbf{L}^{*,\varepsilon_0}$ est le tenseur de densité effectif d'ordre 0

$$\mathbf{L}^{*,\varepsilon_0} = \langle \mathbf{P}^{\varepsilon_0} \rangle. \quad (2.28)$$

Ce tenseur $\mathbf{L}^{*,\varepsilon_0}$ n'est pas nécessairement diagonal ni même proportionnel au tenseur identité. Il porte alors l'anisotropie effective introduite par les petites hétérogénéités du milieu, ce qui signifie que dans le cas acoustique, la densité de masse devient anisotrope. Un tel résultat peut paraître inhabituel à la communauté des sismologues. Cependant, une densité effective anisotrope est effectivement connue des acousticiens, notamment pour la propagation d'ondes acoustiques dans un milieu fluide avec inclusions soit selon un réseau périodique de cylindres solides (de Hoop 1995, Cummer et Schurig 2007, Torrent et Sánchez-Dehesa 2008), soit selon une géométrie lamellée (Schoenberg 1984, par exemple). Par ailleurs, on peut observer que le processus d'homogénéisation développé jusqu'à ce point et appliqué au cas scalaire de l'acoustique correspond exactement à l'homogénéisation des équations correspondant au problème statique, c'est-à-dire à l'homogénéisation du problème elliptique

$$\nabla \cdot (a(\mathbf{x}) \nabla q) = 0, \quad (2.29)$$

où q est le champ scalaire recherché et $a(\mathbf{x})$ est un paramètre scalaire dépendant de la position. Dans le cas des milieux périodiques, il est établi depuis longtemps (Sanchez-Palencia 1980) que le problème effectif s'écrit

$$\nabla \cdot (\mathbf{A}^*(\mathbf{x}) \nabla q^*) = 0, \quad (2.30)$$

où \mathbf{A}^* est désormais un tenseur d'ordre 2 (de dimensions la dimension de l'espace physique) ce qui permet effectivement de considérer que le paramètre scalaire initial a devient anisotrope par homogénéisation. De plus, on peut démontrer (toujours dans le cas périodique) que \mathbf{A}^* est symétrique défini positif si $a(\mathbf{x})$ est défini positif.

Dans le cas des milieux quelconques, les propriétés du tenseur de densité effective ne sont pas évidentes à obtenir théoriquement. L'adaptation du théorème obtenu dans le cas statique pour des milieux périodiques permet le résultat suivant :

Soit le problème de cellule défini sur la cellule \mathbf{Y}_x et de solution le vecteur χ^{ε_0}

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\mathbf{P}^{\varepsilon_0}) = 0, \quad (2.31)$$

$$\mathbf{P}^{\varepsilon_0} = \mathbf{L}^{\varepsilon_0} \cdot \mathbf{Q}^{\varepsilon_0}, \quad (2.32)$$

$$\mathbf{Q}^{\varepsilon_0} = \mathbf{I} + \nabla_{\mathbf{y}} \chi^{\varepsilon_0}, \quad (2.33)$$

$$\langle \chi^{\varepsilon_0} \rangle = 0, \quad (2.34)$$

avec condition de périodicité aux bords et où $\mathbf{P}^{\varepsilon_0}$ et $\mathbf{Q}^{\varepsilon_0}$ sont des tenseurs intermédiaires d'ordre 2, $\nabla_{\mathbf{y}} \chi^{\varepsilon_0}$ représente la matrice jacobienne de χ^{ε_0} , $(\nabla_{\mathbf{y}} \chi^{\varepsilon_0})_{ij} = \frac{\partial \chi_i^{\varepsilon_0}}{\partial y_j}$ et $\mathbf{L}^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est un tenseur d'ordre 2 paramétrisant le problème. En posant $\mathbf{L}^{*,\varepsilon_0} = \langle \mathbf{P}^{\varepsilon_0} \rangle$, où $\langle \cdot \rangle$ représente la moyenne sur la cellule \mathbf{Y}_x , on a alors :

- si $\mathbf{L}^{\varepsilon_0}$ est symétrique alors le tenseur $\mathbf{L}^{*,\varepsilon_0}$ est symétrique,
- si $\mathbf{L}^{\varepsilon_0}$ est défini positif alors $\mathbf{L}^{*,\varepsilon_0}$ est défini positif.

La preuve de ce résultat est une adaptation de la preuve pour le cas statique périodique et est reportée en Annexe A. Malheureusement, ce théorème ne permet pas de conclure sur la symétrie du tenseur effectif car il ne fait que reporter le problème sur les propriétés du tenseur initial $\mathbf{L}^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ dont la construction est détaillée plus loin. Nous verrons alors que la symétrie ou le caractère défini positif de ce tenseur ne sont pas des propriétés faciles à mettre en évidence (ni même garanties).

- pour $(i, j) = (0, 1)$ on a

$$\frac{1}{\kappa^{\varepsilon, \varepsilon_0}} \ddot{q}_0 - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{u}_0) - \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\mathbf{u}_1) = g, \quad (2.35)$$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{L}^{\varepsilon, \varepsilon_0} \cdot (\nabla_{\mathbf{x}}(q_1) + \nabla_{\mathbf{y}}(q_2)), \quad (2.36)$$

ce qui permet d'obtenir l'équation des ondes effective par moyennage sur la cellule de 2.35

$$\left\langle \frac{1}{\kappa^{\varepsilon_0}} \right\rangle \langle \ddot{q}_0^{\varepsilon_0} \rangle - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \langle \mathbf{u}_0^{\varepsilon_0} \rangle = g. \quad (2.37)$$

Les relations 2.37 et 2.27 constituent alors les équations effectives d'ordre 0 des ondes acoustiques

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa^{*,\varepsilon_0}} \langle \ddot{q}_0^{\varepsilon_0} \rangle - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \langle \mathbf{u}_0^{\varepsilon_0} \rangle &= g, \\ \langle \mathbf{u}_0^{\varepsilon_0} \rangle(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{L}^{*,\varepsilon_0} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}(\langle q_0 \rangle)(\mathbf{x}, t), \end{aligned}$$

avec $\frac{1}{\kappa^{*,\varepsilon_0}} = \left\langle \frac{1}{\kappa^{\varepsilon_0}} \right\rangle$ et $\mathbf{L}^{*,\varepsilon_0} = \langle \mathbf{H}^{\varepsilon_0} \rangle$ (Equ. 2.28)

Construction de la paramétrisation initiale

Comme dans le cas élastique, la construction de la paramétrisation initiale $(\kappa^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{L}^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ doit permettre les développements théoriques précédents. Il s'agit alors de chercher $\kappa^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et $\mathbf{L}^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ tels que :

$$- \frac{1}{\kappa^{\varepsilon_0}}, \mathbf{P}^{\varepsilon_0}, \chi^{\varepsilon_0} \in \mathcal{V},$$

- $\kappa^{\varepsilon_0}, \mathbf{L}^{\varepsilon_0}$ soient définis positifs,
- $\kappa^{\varepsilon_0} \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_0} \right) = \kappa(\mathbf{x})$ et $\mathbf{L}^{\varepsilon_0} \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_0} \right) = \mathbf{L}(\mathbf{x})$.

Pour construire κ^{ε_0} , on commence par définir $\kappa^{\varepsilon_0, s}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ définie par $\kappa^{\varepsilon_0, s}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \kappa(\varepsilon_0 \mathbf{y})$ sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbf{Y}_{\mathbf{x}}$ et étendue sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ par $\mathbf{Y}_{\mathbf{x}}$ -périodicité en \mathbf{y} ; on a donc $\kappa^{\varepsilon_0, s} \in \mathcal{T}$. En définissant alors κ^{ε_0} par

$$\frac{1}{\kappa^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = \mathcal{F}^{\lambda_0} \left(\frac{1}{\kappa^{\varepsilon_0, s}} \right) \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_0} \right) + \left(\frac{1}{\kappa^{\varepsilon_0, s}} - \mathcal{F}^{\lambda_0} \left(\frac{1}{\kappa^{\varepsilon_0, s}} \right) \right) (\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (2.38)$$

on a bien $\kappa^{\varepsilon_0} \in \mathcal{T}$ et $\kappa^{\varepsilon_0} \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_0} \right) = \kappa(\mathbf{x})$ est immédiat.

Par propriétés du filtre passe-bas (relation 1.95 et $\langle \frac{1}{\kappa^{\varepsilon_0, s}} - \mathcal{F}^{\lambda_0} \left(\frac{1}{\kappa^{\varepsilon_0, s}} \right) \rangle = 0$) on a de nouveau $\langle \frac{1}{\kappa^{\varepsilon_0}} \rangle = \left\langle \mathcal{F}^{\lambda_0} \left(\frac{1}{\kappa^{\varepsilon_0, s}} \right) \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_0} \right) \right\rangle = \mathcal{F}^{\lambda_0} \left(\frac{1}{\kappa^{\varepsilon_0, s}} \right) \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_0} \right)$, soit $\frac{1}{\kappa^{\varepsilon_0}} \in \mathcal{V}$. La fonction $\kappa^{\varepsilon_0, s}$ est strictement positive par construction et pour un type bien choisi d'ondelette de filtrage, κ^{ε_0} est aussi strictement positive. Enfin, on peut remarquer qu'avec une telle construction, la compressibilité isentropique effective $\frac{1}{\kappa^{*, \varepsilon_0}}$ se calcule indifféremment avec l'opérateur de moyennage ou l'opérateur de filtrage

$$\frac{1}{\kappa^{*, \varepsilon_0}} = \left\langle \frac{1}{\kappa^{\varepsilon_0}} \right\rangle = \mathcal{F}^{\lambda_0} \left(\frac{1}{\kappa^{\varepsilon_0}} \right). \quad (2.39)$$

Pour construire $\mathbf{L}^{\varepsilon_0}$, on utilise une procédure identique à celle du cas élastique.

On commence par définir le tenseur intermédiaire $\mathbf{L}^{\varepsilon_0, s}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ défini par $\mathbf{L}^{\varepsilon_0, s}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{L}(\varepsilon_0 \mathbf{y})$ sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbf{Y}_{\mathbf{x}}$ et étendu sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ par $\mathbf{Y}_{\mathbf{x}}$ -périodicité en \mathbf{y} ; on a donc $\mathbf{L}^{\varepsilon_0, s} \in \mathcal{T}$. Pour chaque $\mathbf{Y}_{\mathbf{x}}$ et en utilisant $\mathbf{L}^{\varepsilon_0, s}$ dans le problème de cellule défini par les relations 2.23 à 2.26, on définit le correcteur initial $\chi^{\varepsilon_0, s}$ ainsi que les tenseurs $\mathbf{Q}^{\varepsilon_0, s}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et $\mathbf{P}^{\varepsilon_0, s}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ correspondants. On construit alors les tenseurs $\mathbf{Q}^{\varepsilon_0}$ et $\mathbf{P}^{\varepsilon_0}$ définis sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbf{Y}_{\mathbf{x}}$ par

$$\mathbf{Q}^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{I} + \left[\left(\mathbf{Q}^{\varepsilon_0, s} - \mathcal{F}^{\lambda_0}(\mathbf{Q}^{\varepsilon_0, s}) \right) (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] \cdot \left[\mathcal{F}^{\lambda_0}(\mathbf{Q}^{\varepsilon_0, s}) \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_0} \right) \right]^{-1} \quad (2.40)$$

et

$$\mathbf{P}^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left[\left(\mathbf{P}^{\varepsilon_0, s} - \mathcal{F}^{\lambda_0}(\mathbf{P}^{\varepsilon_0, s}) \right) (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathcal{F}^{\lambda_0}(\mathbf{P}^{\varepsilon_0, s}) \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_0} \right) \right] \cdot \left[\mathcal{F}^{\lambda_0}(\mathbf{Q}^{\varepsilon_0, s}) \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_0} \right) \right]^{-1} \quad (2.41)$$

et étendus sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ par périodicité (ils sont donc par construction dans \mathcal{T}). On retrouve exactement de la même manière que pour la densité que $\mathbf{Q}^{\varepsilon_0}$ et $\mathbf{P}^{\varepsilon_0}$ sont en fait dans \mathcal{V} . L'inversibilité de $\mathcal{F}^{\lambda_0}(\mathbf{Q}^{\varepsilon_0, s}) \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_0} \right)$ resterait à nouveau à démontrer¹ et se vérifie à nouveau numériquement.

1. l'idée intuitive d'une diagonale dominante pour un filtre suffisamment passe-bas tend cependant toujours à indiquer que l'opération d'inversion est possible pour au moins une gamme de fréquences de coupure

Enfin, on déduit de la relation 2.24 la construction de $\mathbf{L}^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ par

$$\mathbf{L}^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{P}^{\varepsilon_0} \cdot (\mathbf{Q}^{\varepsilon_0})^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (2.42)$$

qui, pour un type d'ondelette bien choisi, reste défini positif, mais dont la symétrie n'est pas évidente ni garantie.

Finalement, utilisant 2.41 dans la relation 2.28 définissant $\mathbf{L}^{*,\varepsilon_0}$, on observe que

$$\mathbf{L}^{*,\varepsilon_0}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{P}^{\varepsilon_0} \rangle(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{\lambda_0}(\mathbf{P}^{\varepsilon_0,S}) \cdot \left(\mathcal{F}^{\lambda_0}(\mathbf{Q}^{\varepsilon_0,S}) \right)^{-1} \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_0} \right), \quad (2.43)$$

ce qui permet de définir simplement et à l'identique que pour le cas élastique la procédure numérique d'homogénéisation.

Homogénéisation numérique

Les relations 2.39 et 2.43, permettent l'obtention des paramètres acoustiques effectifs selon la procédure :

1. On définit la cellule de périodicité \mathbf{Y}_0 comme étant tout le domaine Ω ce qui permet de n'avoir à résoudre qu'un seul problème de cellule initial sur tout le domaine. On résout alors numériquement un tel problème par une méthode d'éléments finis définis de degré moyen (entre P2 et P6) sur un maillage à base triangulaire (donc facile à mailler). Les tenseurs $\mathbf{P}^{\varepsilon_0,S}$ et $\mathbf{Q}^{\varepsilon_0,S}$ sont alors construits.
2. Le paramètre λ_0 étant défini, l'ondelette de filtrage est dimensionnée et on filtre la compressibilité isentropique $\frac{1}{\kappa^{\varepsilon_0}}$, les tenseurs $\mathbf{P}^{\varepsilon_0,S}$ et $\mathbf{Q}^{\varepsilon_0,S}$. Les tenseurs filtrés sont définis sur (et ensuite interpolés si nécessaire à partir d') une grille régulière dont le pas dépend de λ_0 (afin de restituer les oscillations du milieu effectif; en pratique nous utilisons un pas de grille de $\sim \lambda_0/9$ avec une interpolation par splines).
3. la compressibilité isentropique effective est directement obtenue par filtrage et le tenseur de densité effectif $\mathbf{L}^{*,\varepsilon_0}(\mathbf{x})$ est formé grâce à la relation 2.43 nécessitant l'inversion de $\mathcal{F}^{\lambda_0}(\mathbf{Q}^{\varepsilon_0,S}) \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_0} \right)$ en tous points de la grille. Le tenseur de densité effectif est alors continûment défini sur la même grille régulière que précédemment et les valeurs intermédiaires sont obtenues par interpolation (linéaire, splines, ...) sur cette grille.

Convergence numérique

Reprenant la procédure de test de l'homogénéisation élastique de Capdeville et al. (2010b) évoquée au paragraphe 1.3.4, on teste la convergence de la procédure d'homogénéisation acoustique sur un milieu aléatoire 2D (Figure 2.1). Le domaine considéré est carré de 40 km de côté et est divisé en 400×400 éléments carrés de 100 m de côté. Chaque élément possède alors des paramètres acoustiques (ρ, c) constants. La partie hétérogène du milieu correspond au domaine central carré de 30 km de côté entouré d'une bande de matériau homogène de densité

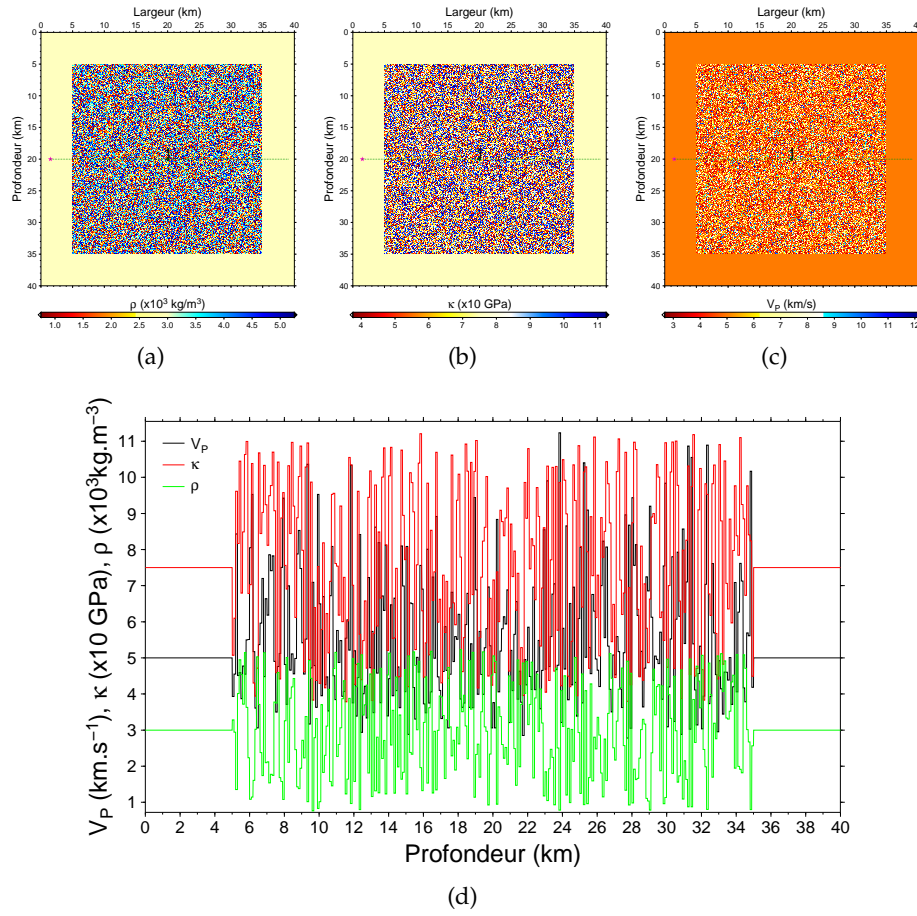


FIGURE 2.1 – Cartes de densité (2.1(a)), du module de compressibilité (2.1(b)) et de la vitesse du son (2.1(c)) du milieu hétérogène aléatoire de test et coupes verticales à $x = 20$ km (2.1(d)) des paramètres correspondants. L'étoile montre l'emplacement de la source, les diamants vers ceux des récepteurs.

$\rho_0 = 3000 \text{ kg.m}^{-3}$ et de vitesse du son $c_0 = 5 \text{ km.s}^{-1}$. Dans le milieu central, les paramètres acoustiques ($\rho, \kappa = \rho c^2$) de chaque élément sont tirés aléatoirement avec un contraste de $\pm 75\%$ sur la densité ρ et de $\pm 50\%$ sur le module de compressibilité κ par rapport à leur valeur définie sur la couronne homogène extérieure. La vitesse du son est alors bornée par $2.7 \text{ km.s}^{-1} \leq c \leq 12.1 \text{ km.s}^{-1}$.

La source explosive située dans le milieu homogène (étoile dans la Figure 2.1) admet une fréquence centrale de $f_0 = 1.35 \text{ Hz}$, d'où une fréquence de coupure de $f_c = 3.375 \text{ Hz}$ et une longueur d'onde minimale de $\lambda_{\min} = \frac{c_{\min}}{f_c} \simeq 800 \text{ m}$. Par comparaison avec la taille des hétérogénéités (ici prise comme étant la taille des éléments) on a $\varepsilon = 0.125$ ce qui correspond effectivement à un milieu hétérogène avec de petites hétérogénéités devant la longueur d'onde du champ d'onde donc au cadre de l'homogénéisation.

Pour $\varepsilon_0 = 0.5$, on montre en Figure 2.2 les cartes et des coupes des paramètres effectifs continus obtenus par l'homogénéisation acoustique. On voit en Figure 2.2(e) que le tenseur de densité effectif, dont nous forçons la symétrie en sortie de la procédure d'homogénéisation,

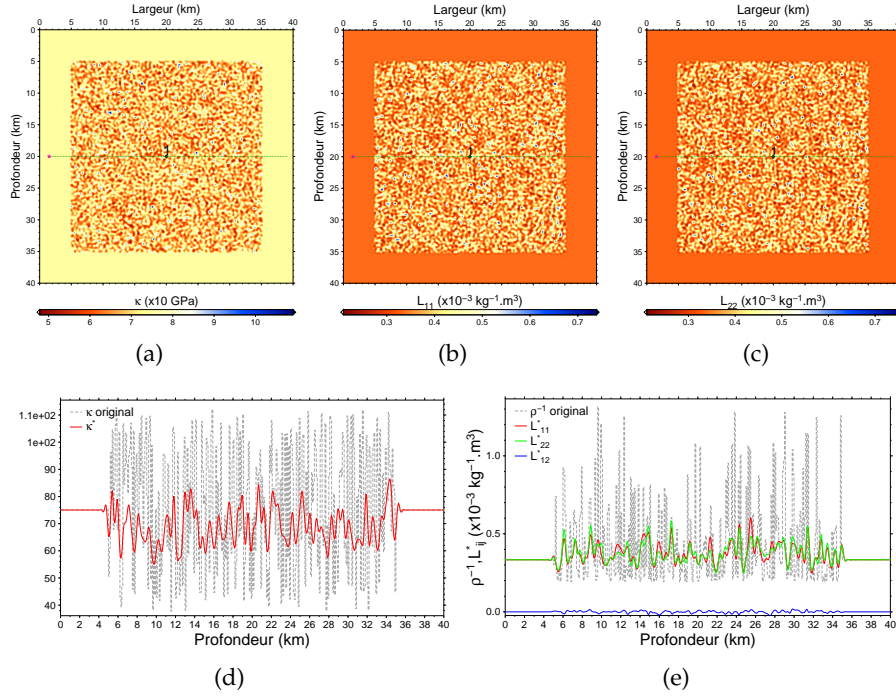


FIGURE 2.2 – Cartes (2.2(a),2.2(b),2.2(c)) et coupes verticales en $x = 20$ km (2.2(d),2.2(e)) des paramètres acoustiques effectifs pour $\varepsilon_0 = 0.5$.

est numériquement diagonal ($L_{12}^* \simeq 0$), mais non isotrope car non proportionnel au tenseur identité ($L_{11}^* \simeq L_{22}^*$).

Faisant varier la fréquence de coupure du filtre λ_0 , donc aussi $\varepsilon_0 = \frac{\lambda_0}{\lambda_m}$, on étudie la convergence de l'homogénéisation acoustique en utilisant $\varepsilon_0 \in [0.075; 2]$ (Figures 2.3 et 2.4). Le champ de pression est calculé pour chaque ε_0 par un tir SEM et la référence correspond au tir dans le milieu original discret. En Figure 2.4, on compare la convergence au niveau du récepteur central (numéroté 1 sur les cartes 2D de la Figure 2.1) du champ de pression obtenu dans les milieux homogénéisés (courbe rouge) à celle obtenue en filtrant simplement les quantités $\frac{1}{\kappa}$ et $\frac{1}{c}$ (la lenteur) pour construire un milieu effectif. Le signal obtenu par le simple filtrage des paramètres acoustiques est systématiquement déphasé, même pour la première arrivée et la forme de la coda ainsi obtenue converge très lentement vers la référence. La méthode d'homogénéisation acoustique permet en revanche d'obtenir systématiquement une bonne première phase puis de converger rapidement vers la référence pour le reste du signal (en $\varepsilon_0 = 0.5$ on a déjà une bonne convergence).

En calculant à nouveau les erreurs relatives $\mathcal{L}^2([0, T])$ en temps, c'est-à-dire les résidus relatifs des sismogrammes par rapport aux sismogrammes de la référence (relation 1.167), pour chaque récepteur de la ligne horizontale en Figure 2.1 et en les moyennant sur tous les récepteurs (relation 1.168), on obtient la courbe de convergence de la Figure 2.3. On montre sur la même figure les courbes de convergence pour des milieux effectifs obtenus avec deux méthodes de filtrage :

- filtrage du module de compressibilité κ et de la lenteur $\frac{1}{c}$ (courbe noire) et

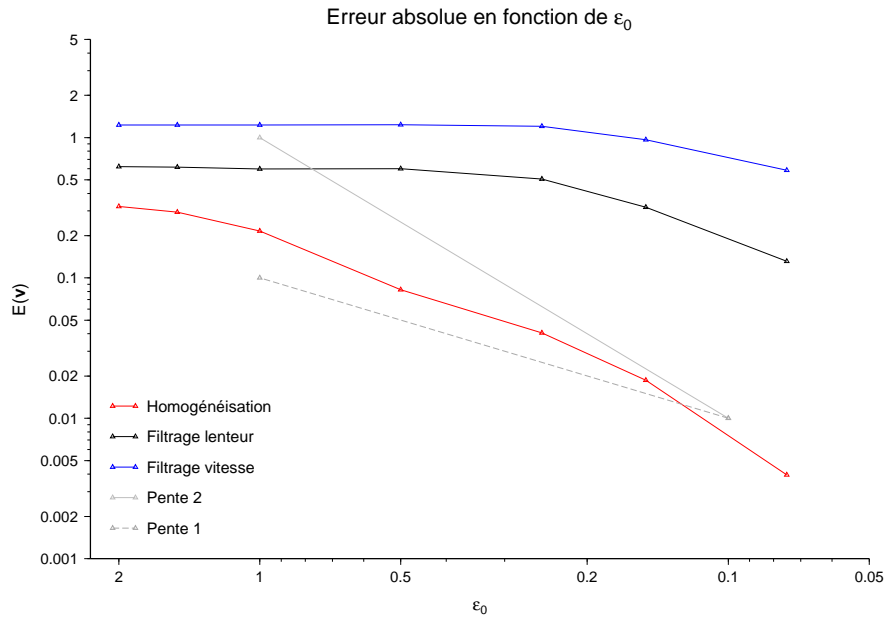


FIGURE 2.3 – Courbes d'erreurs en fonction de ε_0 pour le milieu filtré (lent en noir, vitesses en bleu) et le milieu homogénéisé (rouge). On montre pour repère les pentes pour des erreurs en $O(\varepsilon_0)$ (« pente 1 », courbe grise hachurée) et $O(\varepsilon_0^2)$ (« pente 2 », courbe grise continue).

- filtrage du module de compressibilité κ et de la vitesse c (courbe bleue).

Ces deux méthodes de filtrage montrent une erreur systématiquement plus importante que celle de l'homogénéisation et un faible taux de convergence. Le taux de convergence obtenu pour la méthode d'homogénéisation est conforme à la théorie qui assure une convergence au minimum en $O(\varepsilon_0)$. On observe en fait un régime de convergence en $O(\varepsilon_0^2)$ comme pour le cas élastique, signifiant que la moyenne de $q_1^{\varepsilon_0}$ reste faible dans cet exemple de milieu hétérogène.

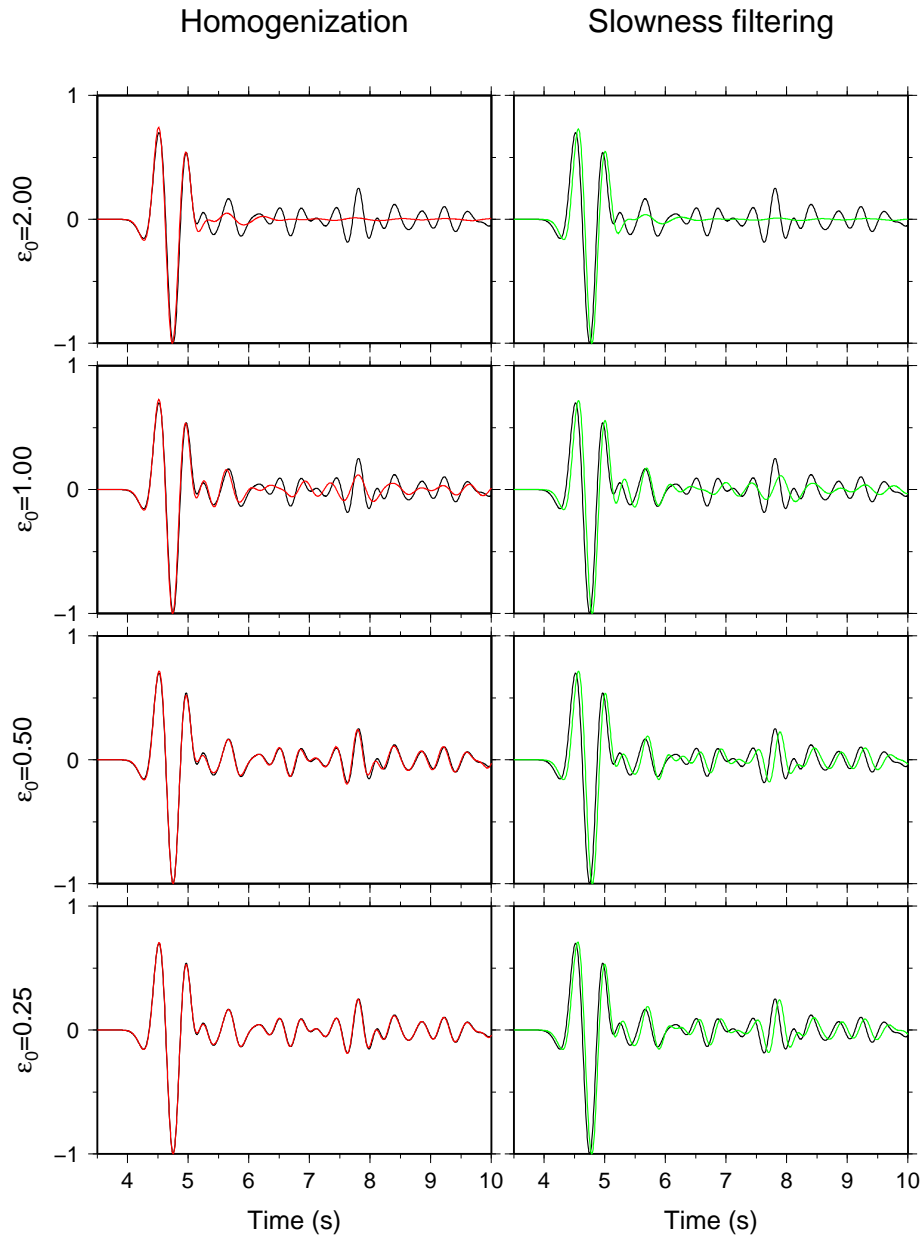


FIGURE 2.4 – Sismogrammes normalisés de pression pour le récepteur central ($\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = 20$ km) pour $\varepsilon_0 = 0.25, 0.5, 1.0$, et 2.0 (de bas en haut). Le tir de référence (milieu original) est montré en noir, le tir dans le milieu homogénéisé est en rouge et le tir dans le milieu filtré (lenteur) est en vert.

2.2 VALIDITY OF THE ACOUSTIC APPROXIMATION FOR ELASTIC WAVES IN HETEROGENEOUS MEDIA.

Abstract

The acoustic approximation of elastic waves is a very common approximation in exploration geophysics. The interest of the acoustic approximation in the inverse problem context lies in the fact that it leads to a much lower numerical cost than for the elastic problem. Nevertheless, the Earth is not an acoustic body and it has been shown in the past that this approximation is not without drawbacks mainly because P to S energy conversion and anisotropy cannot be easily modelled. Here, we study a different issue of this approximation related to small size heterogeneities with respect to the minimum wavelength of the wavefield. We first numerically show that elastic and acoustic waves behave differently with respect to small scale heterogeneities, introducing differences in amplitudes but also in phase between elastic and acoustic signals. We give then physical and mathematical interpretations of this phenomenon, showing the different nature of elastic and acoustic wave propagation and leading to the conclusion that, in rough media, acoustic waves can only be a poor quality approximation of elastic waves. Interestingly, we also show that, in the acoustic case, small scale heterogeneities give rise to natural acoustic effective anisotropic media through an anisotropic effective mass matrix. Unfortunately, this anisotropy is of different nature compared to the elastic effective anisotropy and cannot be used to mimic elastic anisotropy.

Introduction

In the exploration geophysics context, the acoustic wave equation is often used as an approximation to the elastic wave equation. This approximation is widely used for migration techniques (*e.g.* Berkhout (1984), Etgen et al. (2009)), but also for full waveform inversion techniques (Virieux et Operto 2009) for both theoretical developments (*e.g.* Tarantola (1984), Gauthier et al. (1986), Bunks et al. (1995), Pratt et al. (1998), Ben-Hadj-Ali et al. (2008), Métivier et al. (2013)) and data applications (*e.g.* Shin et Cha (2008), Plessix et al. (2010), Vigh et al. (2010), Schiemenz et Igel (2013)). The main reason to perform such an approximation is to simplify both forward and inverse problems. For the forward modeling, the acoustic approximation considerably reduces the numerical cost for two main reasons. Firstly, acoustic equations are scalar equations while elastic equations rely on vector and tensor quantities. Secondly, acoustic forward modeling may gain up to a factor 100 in computation time as the space sampling (and then time sampling) of the minimum wavelength of the wavefield relies on P-wave velocities in the acoustic case while it relies on the much smaller S-wave velocities in the elastic case.

For the full waveform inverse problem, a faster forward problem is a decisive advantage, and having to invert for fewer parameters than for the elastic case leads to a simpler inverse problem. If the reasons that motivate such an approximation are clear, its justifications are not that obvious. Indeed, the Earth is not an acoustic body and, even for marine

exploration setup for which both sources and receivers lie in an acoustic medium, waves under consideration are elastic waves for most of the propagation path between the source and the receiver. In the migration context, where it is attempted to migrate only early P arrivals, this approximation seems often justified, at least when no anisotropy is present. In the full waveform inversion context however, this approximation doesn't seem always justified as it leads to persistent unreliable inversion results when S-wave parameters play a non negligible role in P-wave propagation (Barnes et Charara 2008). In the forward modeling context, acoustic approximations of elastic P-waves is well known for encountering major difficulties (Alkhalifah 1998; 2000; 2003, Grechka et al. 2004, Fletcher et al. 2008, Operto et al. 2009, Bakker et Duveneck 2011, Chu et al. 2012, Bube et al. 2012, Wu et Alkhalifah 2014). Indeed, if the acoustic approximation of elastic P-waves is natural for homogeneous isotropic media, it is not the case anymore for anisotropic media nor for heterogeneous media where P-to-S conversions may occur but cannot be taken into account by acoustic equations (although one can find a method for correcting this issue in some cases in Hobro et al. (2014)). As both scattering and effective anisotropy are observed on elastic wavefields propagating with wavelengths much larger than the size of the medium's heterogeneities, we focus here on the accuracy of acoustic approximations for elastic P-waves in 'rough' heterogeneous media, that is when heterogeneity scales smaller than the minimum wavelength are present. To address this problem, we first recall the elastic and acoustic wave equations and how they can be related to each other in the homogeneous media case. We present then three simple numerical experiments to challenge the acoustic approximation of elastic wave propagation. After showing that the approximation fails for "rough" media we mathematically and physically propose an explanation for this disagreement based on homogenization theory. Finally we discuss the induced effective acoustic anisotropy versus elastic anisotropy in the simple layered case before concluding.

2.2.1 Acoustic approximation of the elastic equations

Elastic and acoustic equations

Considering an elastic domain Ω with a free surface $\partial\Omega$, the elastic wave equations driving the displacement vector $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ are :

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f} \text{ in } \Omega \quad (2.44)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \text{ in } \Omega \quad (2.45)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ in } \partial\Omega \quad (2.46)$$

where \mathbf{x} is the positional vector, t is the time component, $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ is the elastic stiffness tensor, $\rho(\mathbf{x})$ is the (mass) density, $\boldsymbol{\sigma}$ is the stress tensor, $\boldsymbol{\epsilon} = (\nabla \mathbf{u} + {}^T \nabla \mathbf{u}) / 2$ is the strain tensor, T denotes the transpose operator, \mathbf{f} is the source term and \mathbf{n} denotes the unit normal to $\partial\Omega$. In general, the elastic stiffness tensor \mathbf{c} depends upon 21 independent coefficients in 3-D and 6 in 2-D, but only on the two Lamé parameters $\lambda(\mathbf{x})$ and $\mu(\mathbf{x})$ for the isotropic case (Lamé 1852). In such a case, the constitutive relation (2.45)

can be rewritten as :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.47)$$

where \mathbf{I} is the identity tensor and $\text{tr}(\mathbf{a}) = a_{ii}$ (using the Einstein implicit summation convention) is the trace operator. Isotropic P-wave and S-wave velocities are then related to Lamé parameters through :

$$\lambda + 2\mu = \rho V_P^2 \quad (2.48)$$

$$\mu = \rho V_S^2 \quad (2.49)$$

For the same domain Ω , but for the acoustic wave propagation, the velocity potential q is solution of :

$$\frac{1}{\kappa} \ddot{q} - \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} = \dot{g} \quad \text{in } \Omega \quad (2.50)$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{1}{\rho} \nabla q \quad \text{in } \Omega \quad (2.51)$$

$$q = 0 \quad \text{in } \partial\Omega \quad (2.52)$$

where $\kappa(\mathbf{x})$ is the acoustic bulk modulus, $\rho(\mathbf{x})$ is the (mass) density, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ is the displacement vector and $g(\mathbf{x}, t)$ is a scalar source term. In general, the acoustic medium is fully described by only 2 parameters, namely its density $\rho(\mathbf{x})$ and the 'sound speed' $V(\mathbf{x})$ such that $\kappa(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})V^2(\mathbf{x})$, where the acoustic bulk modulus κ shall not be confused with the elastic bulk modulus $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ (which is not used in this paper).

In general, the displacement vector \mathbf{u} solution to the above elastodynamic equations can be related to its acoustic counterpart only for an infinite homogeneous isotropic domain and for an explosive isotropic source as described in Appendix 2.2.2.

However, realistic seismic wave propagation in the Earth necessitates at least a free surface and some reflectors. Reflections will then occur at each interface generating S waves, which breaks the assumption that the displacement \mathbf{u} can derive only from the above potential q . A solution to this problem is to "filter" rotational waves (S waves), keeping only the irrotational part of the signal which ought to derive from the wanted potential. To do so, we use the pressure wavefield p defined as $p = -(1/2)\kappa \nabla \cdot \mathbf{u}$ in the elastic case (Landau et Lifshitz 1959b). Indeed, no rotational part of the original displacement \mathbf{u} is left in p since $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{m}) = 0$ for any vector \mathbf{m} . We compare then the elastic pressure p to the acoustic pressure signal defined as \dot{q} (Landau et Lifshitz 1959a). In practice, P-to-S (and S-to-P) conversions cannot be accounted for by acoustic approximations anyway, leading to incorrect modeling of amplitudes for elastic P-waves. Phases however may still be correctly modeled in isotropic homogeneous media (with reflections), at least for the first arrivals. In the next two sections, we numerically investigate the equivalence of acoustic and elastic waves in non-homogeneous media with respect to the pressure signal's phase.

Heterogeneous media : the smooth and rough cases

As shown in the previous section, the acoustic and elastic wave equation solution equivalence for P-waves only holds theoretically in the case

of a constant infinite medium. Nevertheless, it is reasonable to assume that the approximation is still valid in the quasi homogeneous (very smooth) media case. In practice, this approximation is used in heterogeneous media that most of the time contains small scale heterogeneities, media to which we will refer as rough media. In the next section, we numerically investigate the validity and the behavior of the acoustic approximation of elastic waves in both smooth and rough media.

Before moving further, we define more precisely “smooth” and “rough” media. To do so, we first define the medium roughness scale λ_0 ². λ_0 is a characteristic measurement of the spatial variations of elastic and acoustic medium parameters. For example, it can be related to the minimum thickness of the layers in a discontinuous layered medium or to the smallest oscillation scale of a continuous medium. Second, we need an estimate of the minimum wavelength of the wavefield λ_{min} . Knowing the maximum frequency f_c (corner frequency of the source or maximum frequency of the filtered seismograms) and the minimum wave velocity over the whole domain V_{min} , a lower bound estimate of λ_{min} is V_{min}/f_c . In general, S waves being always slower than P waves, V_{min} should be set using the slowest S waves. However, we are primarily interested in P waves and we will use the minimum P wave velocity to estimate V_{min} . Defining the parameter $\varepsilon_0 = \lambda_0/\lambda_{min}$ to describe the roughness of the medium toward the wavefield, the following two cases will be considered :

- $\varepsilon_0 \gg 1$, the smooth medium case ;
- $\varepsilon_0 \ll 1$, the rough medium case.

Numerical experiments of the acoustic approximation for heterogeneous smooth and rough media

To study the effect of heterogeneity scale on the acoustic approximation of elastic P -waves, we use three different 2-D experiments and for each experiment type, both smooth and rough models are introduced :

1. experiment (1) : periodic continuous stratified media (Figure 2.5) ;
2. experiment (2) : 2-D random media (Figure 2.6) ;
3. experiment (3) : 2-D SEAM³-based media (Figure 2.7).

For each medium, we first define the elastic version by defining the density $\rho(\mathbf{x})$, and either both Lamé parameters $\lambda(\mathbf{x})$ and $\mu(\mathbf{x})$ or both P -wave and S -wave velocities $V_P(\mathbf{x})$ and $V_S(\mathbf{x})$ respectively over the physical domain Ω . Then the acoustic model version is defined as for the homogeneous case by using density and P -waves velocities from the elastic case : $V = V_P$ (and we therefore always have $\kappa = \lambda + 2\mu = c_{1111} = c_{2222}$).

Experiment (1) media

For the experiment (1), the layered medium is continuously defined vertically (x_2 component) as a sine function around an average value for

2. Contrary to the Lamé parameter λ , wavelengths or scales such as λ_0 will always be subscripted.

3. Fehler et Larner (2008)

the density ρ and the Lamé parameters (see Figure 2.5) :

$$\rho(x_2) = \langle \rho \rangle \left(1 + \nu_\rho \cos \frac{2\pi x_2}{\lambda_0} \right) \quad (2.53)$$

$$\lambda(x_2) = \langle \lambda \rangle \left(1 + \nu_\lambda \cos \frac{2\pi x_2}{\lambda_0} \right) \quad (2.54)$$

$$\mu(x_2) = \langle \mu \rangle \left(1 + \nu_\mu \cos \frac{2\pi x_2}{\lambda_0} \right) \quad (2.55)$$

where λ_0 is the period, $\langle \rho \rangle$, $\langle \lambda \rangle$ and $\langle \mu \rangle$ are the average quantities, and $\nu_\rho = 20\%$ and $\nu_\lambda = \nu_\mu = 55\%$ are the contrasts on density and elastic parameters respectively. These contrasts may not reflect realistic media values but are chosen to make our point clear, as it will appear later. Knowing that using a source corner frequency $f_c = 10 \text{ Hz}$ leads to $\lambda_{P_{min}} = 300 \text{ m}$ and $\lambda_{S_{min}} = 200 \text{ m}$, we choose $\lambda_0 = 8.5 \text{ km}$ for the smooth medium ($\varepsilon_0 \sim 28$) and $\lambda_0 = 50 \text{ m}$ for the rough medium ($\varepsilon_0 \sim 0.17$).

Experiment (2) media

For the experiment (2), we first define the rough medium. It is defined as a matrix of 800×900 square elements of $20 \times 20 \text{ m}^2$ with constant elastic properties. For each element, the density, P-wave and S-wave velocities are randomly chosen within a contrast $\nu = 12.5\%$ of their average value (we can then consider that Lamé coefficients - or elastic coefficients - are roughly taken within a contrast $\nu_c \simeq 35\%$ of their average value). For a source corner frequency $f_c = 10 \text{ Hz}$, we roughly have $\lambda_{P_{min}} \simeq 200 \text{ m}$ ($\varepsilon_0 = 0.1$) and $\lambda_{S_{min}} \simeq 100 \text{ m}$ which is indeed large compared to $\lambda_0 = 20 \text{ m}$. The smooth model is obtained by spatially low-pass filtering the rough model's density and velocities. To do so, we introduce (see Appendix 2.2.2) a low pass filter operator $\mathcal{F}^{\lambda_c}(\cdot)$ such that, for any spatially varying quantity $A(\mathbf{x})$, $\mathcal{F}^{\lambda_c}(A)(\mathbf{x})$ doesn't contain spatial variations smaller than λ_c . We use $\lambda_0 = \lambda_c = 1200 \text{ m}$ to define the smooth model ($\varepsilon_0 = 6$).

Experiment (3) media

For the experiment (3), we use a 2-D cross section of the SEG's SEAM model (Fehler et Lerner 2008), defined on a $10 \text{ m} \times 10 \text{ m}$ regular grid. The rough model is obtained by applying a taper toward constant properties to the sides of the model and S-wave velocities under 1 km/s have been clipped (implying that the top water layer has been replaced by an elastic medium). Small scale heterogeneities (with a pseudo-period of $\lambda_0 \simeq 70 \text{ m}$) and strong contrasts ν on density, P-waves velocity (Figure 2.7(c)) and S-wave velocity can be found on top ($\nu \simeq 5\%$) and under ($\nu \simeq 8\%$) the center salt structure. For a source corner frequency of $f_c = 4 \text{ Hz}$ the estimated P-wave minimum wavelength is $\lambda_{P_{min}} \simeq 375 \text{ m}$ which can be considered as much larger than the medium roughness scale $\lambda_0 \simeq 70 \text{ m}$ ($\varepsilon_0 \sim 0.2$). Similarly to the experiment (2), the smooth model is obtained from the rough model by applying the low-pass filter to the rough density and wave velocities with $\lambda_0 = 2500 \text{ m}$. Using the previous source corner frequency $f_c = 4 \text{ Hz}$ gives then an estimated P-wave minimum

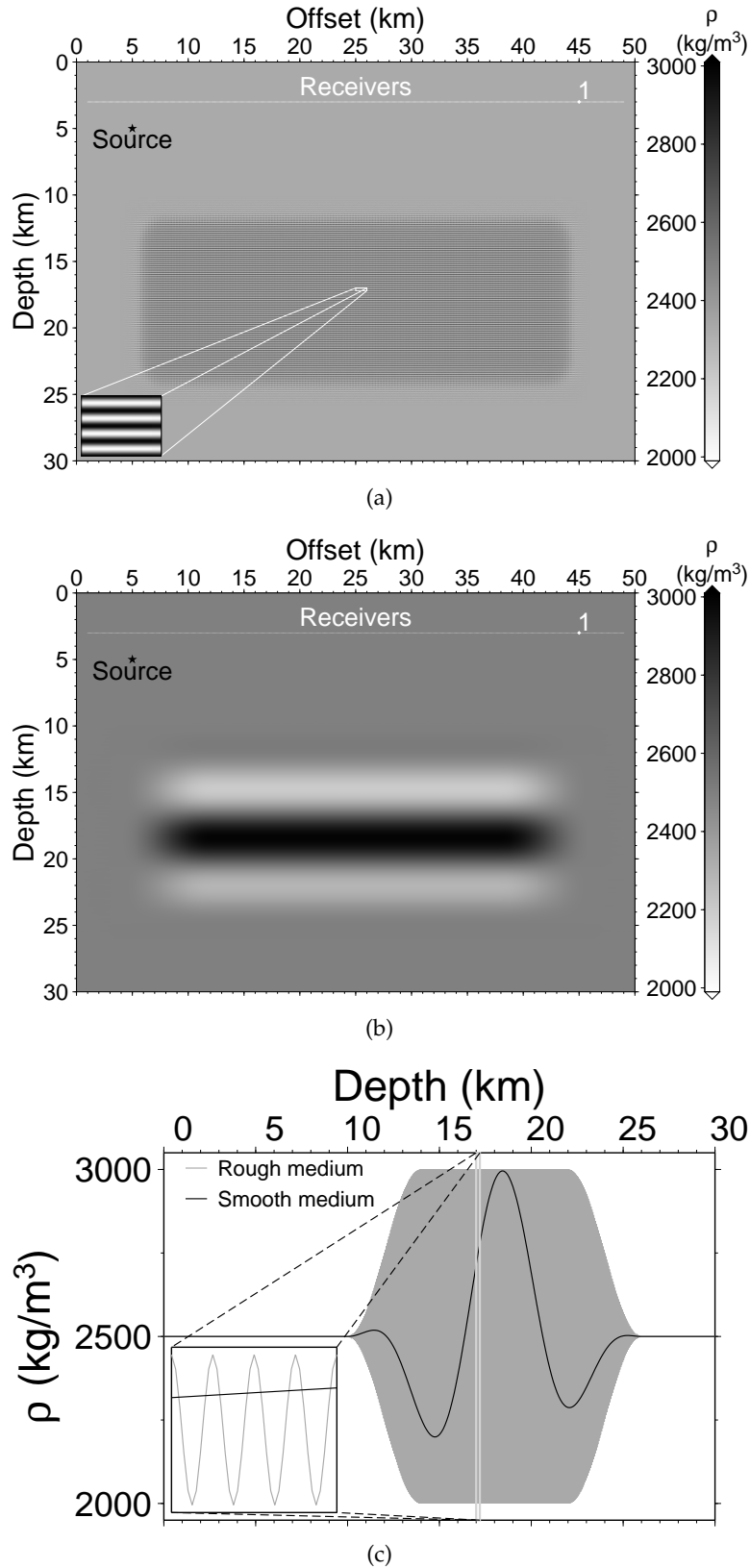


FIGURE 2.5 – Stratified media for experiment (1). 2.5(a) and 2.5(b) : density maps of the rough and smooth medium respectively. In the rough case, we saturated image contrasts for visibility and lower left box is a zoom on the fast varying medium corresponding to the $1 \text{ km} \times 200 \text{ m}$ central white box. The black star indicates the source location and white diamonds (white line) the receiver locations. 2.5(c) : vertical cross section for $x = 15$ km obtained for $\lambda_0 = 50 \text{ m}$ (rough model, grey line) and $\lambda_0 = 8.5 \text{ km}$ (smooth model, black line) with a zoom (lower left box corresponds to depths between 17 km and 17.2 km).

wavelength of $\lambda_{P_{min}} \simeq 280 \text{ m}$ which is indeed much smaller than λ_0 . However, despite the important ratio $\varepsilon_0 = \lambda_0 / \lambda_{P_{min}} \simeq 9$, important large-scale contrasts on velocities over the domain do not allow for $\lambda_{P_{min}}$ to be a representative length to ensure that the filtered medium is really smooth. Indeed, the medium has to be smooth with respect to the main wavelength of the wavefield which is more accurately described by the central frequency of the source ($f_0 \simeq f_c / 2.5$) and for P-wave velocities encountered in the most part of the wave path. We estimate this main P-wave velocity at minimum as $V_P \simeq 2500 \text{ m/s}$, giving then a main wavelength of $V_P / f_0 \simeq 1600 \text{ m}$ which is not small enough compared to λ_0 . We cannot smooth the medium any further (a correct cut-off frequency used to obtain a really smooth medium would then correspond to a wavelength of the order of the medium's depth, thus rendering the smooth medium almost homogeneous) and the only option left to define a smooth medium using the more reasonable medium roughness scale of $\lambda_0 = 2500 \text{ m}$ is to increase the source corner frequency to $f_c = 30 \text{ Hz}$, allowing an estimated main wavelength for the wavefield of about $210 \text{ m} \ll \lambda_0$ ($\varepsilon_0 \sim 12$).

Experiments and numerical set up

Each experiment is devised as a seismic reflection survey : for each experiment the source and receivers are located near the top surface. In order to simplify the wavefield analysis, the top boundary is treated with an absorbing boundary condition instead of a free surface boundary condition, thus eliminating the free surface reflected down-going wave. Lateral domain boundaries are also defined as absorbing boundaries. The bottom boundary is set to a free surface condition which is unusual but remains a simple way to generate an upcoming reflected wave. We observe then a simple direct P-wave (traveling only through a homogeneous medium) and waves coming back to the surface after traveling through the heterogeneous medium. To numerically solve the elastic and acoustic wave equations we use the Spectral Element Method (Komatitsch et Vilotte 1998, Komatitsch et Tromp 2002). The absorbing conditions are achieved using Perfectly Matched Layers (PMLs) (Festa et Vilotte (2005)'s version). The actual computation domains are made larger than the depicted one to avoid any spurious reflection from the PMLs. For each experiment, the same mesh, spectral element polynomial basis and time sampling are used in both elastic and acoustic cases. We systematically mesh the discontinuities of the medium, if any, and elements size and number of 1D Gauss-Lobatto-Legendre (GLL) points are always chosen to oversample the wavefield (see Table 2.1). This allows to obtain excellent numerical accuracy (see Appendix 2.2.2) so that the observed differences between signals cannot be related to numerical artifacts.

To assess the accuracy of the acoustic approximation of elastic waves, we compare the acoustic pressure \dot{q} to the elastic pressure $-(1/2) \kappa \nabla \cdot \mathbf{u}$, but not directly. Indeed, due to energy losses during P-to-S conversions for elastic wave propagation, the amplitude of the acoustic pressure is not expected to match the amplitude of the elastic pressure, and only the phase of the signal may be accurately modeled. For experiment (1) and (2), the signals are very simple making it possible to use a simple and crude

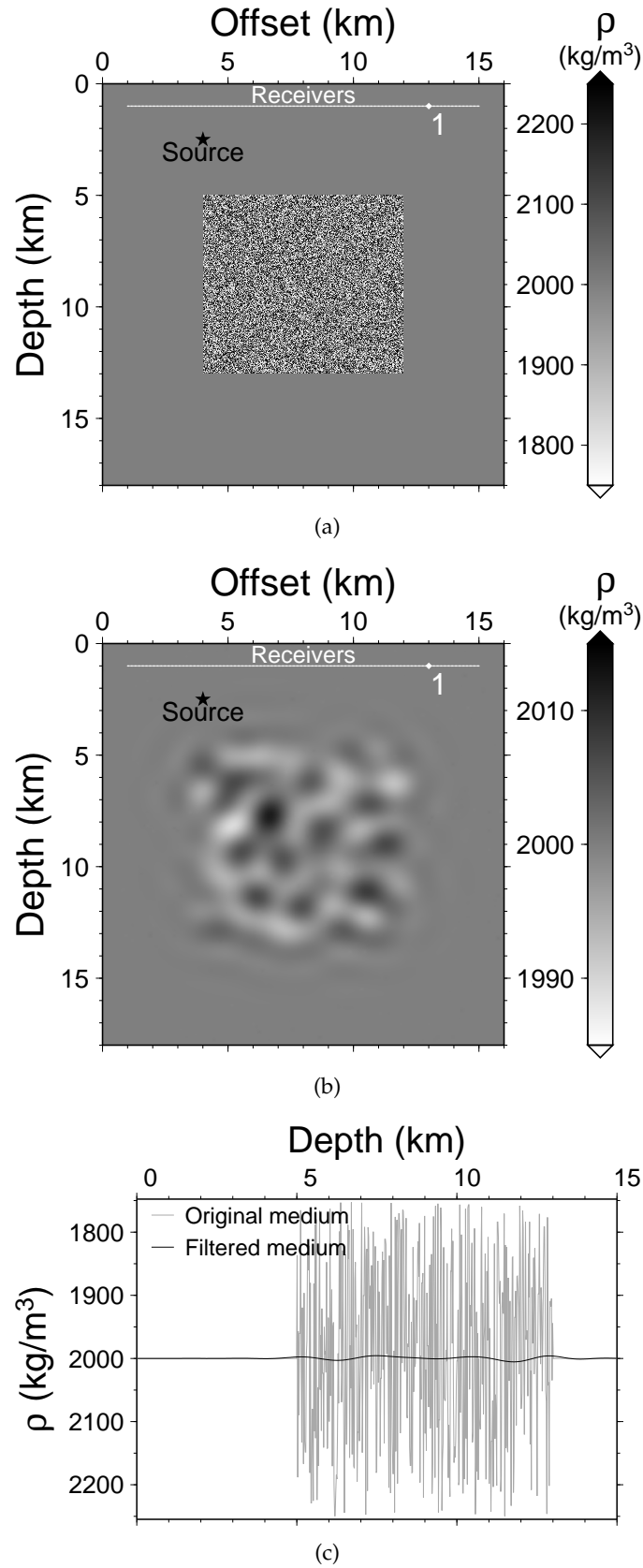


FIGURE 2.6 – Random media for experiment (2). 2.6(a) and 2.6(b) : density maps of the rough and smooth medium respectively. The rough model contains square elements with constant elastic properties of size $\lambda_0 = 20$ m. The smooth model is a low-pass filtered version of the rough model with cut-off spatial frequency of $\lambda_0 = 1200$ m. The black star indicates the source location and white diamonds (white line) the receiver locations. 2.6(c) : vertical cross section for $x = 5$ km obtained for $\lambda_0 = 20$ m (rough model, grey line) and $\lambda_0 = 1200$ m (smooth model, black line).

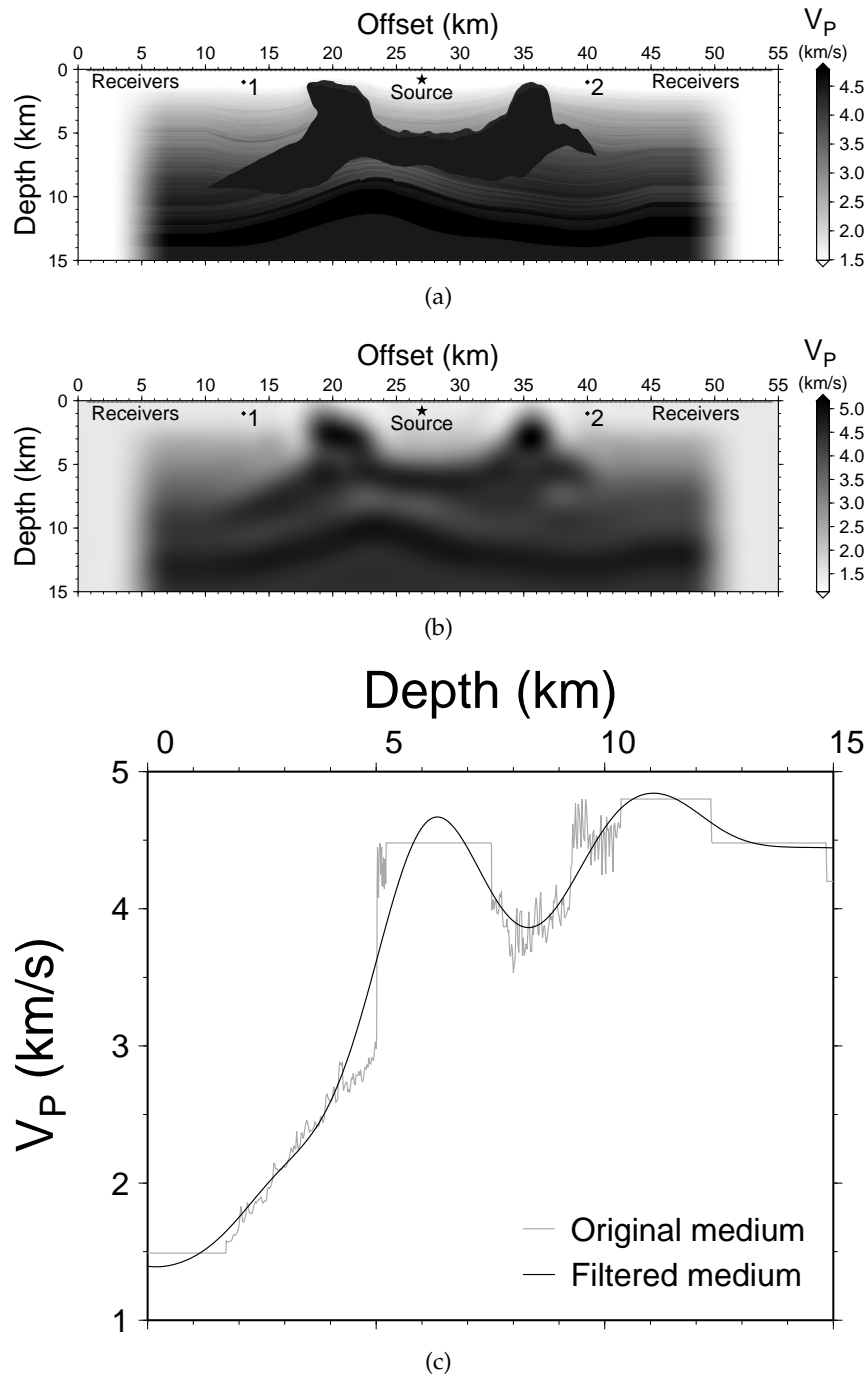


FIGURE 2.7 – Adapted 2D cut in SEG's SEAM (2.7(a),2.7(b) : P-wave velocity mappings, 2.7(c) : vertical 1D cut at offset $x = 27$ km). Original model (2.7(a)) is linearly interpolated from its original $10\text{ m} \times 10\text{ m}$ regular grid. Small scale heterogeneities with strongest contrasts are found on top of the salt structure with pseudo-period of $\lambda_0 \simeq 70\text{ m}$. (2.7(b)) is a low-pass filtered version of (2.7(a)) with cut-off spatial frequency of $\lambda_0 = 2500\text{ m}$. Black star locates the source and black diamonds (including the top black line) locate receivers.

Experiment	Element size (m^2)	GLL points	$\lambda_{P_{min}}(m)$
1 (rough)	200×25	9	300
1 (smooth)	200×200	9	300
2 (rough)	20×20	5	200
2 (smooth)	20×20	5	200
3 (rough)	10×10	5	375
3 (smooth)	50×50	9	40

TABLE 2.1 – Element sizes and number of GLL points in each spatial direction for each experiment in either the rough and smooth cases. For reference, in a homogeneous medium and for 9 GLL points per edge of an element, SEM keeps a very good accuracy with up to $2\lambda_{min}$ per element.

way to perform phase comparisons : each wave arrival is normalized to the same amplitude in a given time window. Doing so, observed signal differences are only related to phase error.

Smooth media results

For the smooth case, results for experiments (1), (2) and (3) are respectively gathered in the left column of Figures 2.8, 2.9, and 2.10. For experiments (1) and (2), traces show mainly two well-separated arrivals - first the direct wave and then the wave reflected at the domain bottom - which are then individually normalized. For experiment (3) only one arrival can clearly be identified (Figure 2.10(e)) for almost every offsets. Consequently, the normalization is applied on the whole signal and not by arrival time windows as it should. The agreement between acoustic and elastic solutions for experiments (1) and (2) is excellent and the relative error $|(p_{el} - p_{ac}) / p_{el}|$ between the normalized elastic pressure $p_{el} = \nabla \cdot \mathbf{u} / \max(\nabla \cdot \mathbf{u})$ and its (also normalized) acoustic counterpart $p_{ac} = \dot{q} / \max(\dot{q})$ is less than 1% (Figures 2.8(e) and 2.9(e)). For experiment (3), the agreement between the two solutions is also very good (Figure 2.10(e)) except for some late arrivals in a small area. These late differences are due to P to S energy losses in the high velocity structure area (salt area).

For smooth models, it can be concluded that, as expected, the acoustic approximation of elastic waves is accurate, at least for time arrivals.

Rough media results

For the rough case, results for experiments (1), (2) and (3) are respectively gathered in the right column of Figures 2.8, 2.9 and 2.10. For experiments (1) and (2), the acoustic approximation is accurate for the direct wave arrival, which is expected as the wave propagation path is homogeneous (Figures 2.8(f), 2.9(f)). For the bottom reflected arrival, a significant phase shift is observed for both experiments (1) and (2). This phase shift is larger for increasing offsets for experiment (1) (Figure 2.8(f)) whereas it is almost offset independent for experiment (2) (Figure 2.9(f)). For experiment (3), observations are complicated by the fact that the amplitude normalization can not be performed efficiently, but a similar

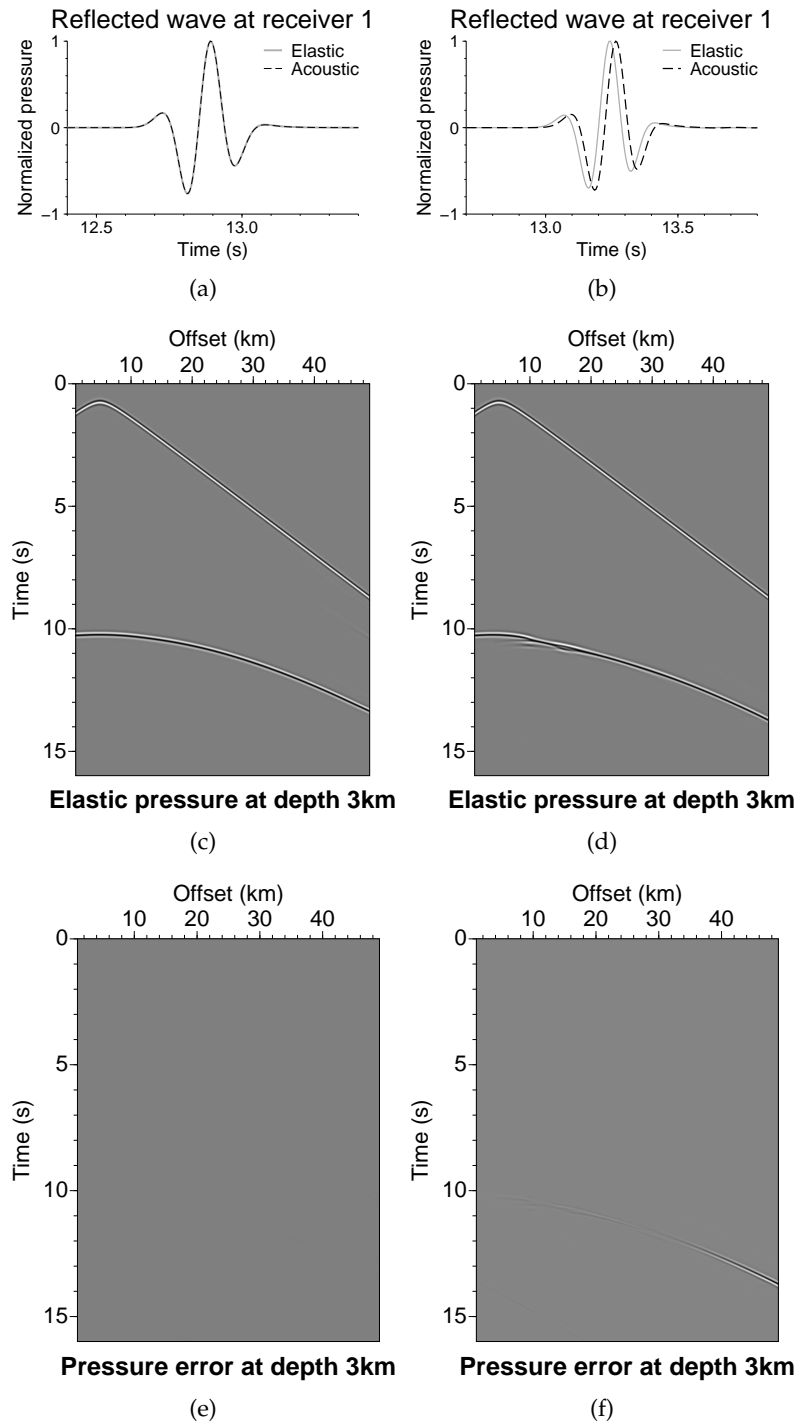


FIGURE 2.8 – Experiment (1) : Stratified model – Left : smooth medium, right : rough medium ; (2.8(a) and 2.8(b)) : elastic (grey) and acoustic (black) normalized pressure seismograms at receiver 1 ; (2.8(c) and 2.8(d)) : normalized seismogram gathers for the elastic run ; (2.8(e) and 2.8(f)) : gathers of the error between elastic and acoustic normalized pressure seismograms.

phase shift as for experiment (1) and (2), even though smaller, can be observed (Figures 2.10(b) and 2.10(d)).

From these numerical observations we conclude that something more than just P-to-S energy conversion losses occur during elastic wave propagation in rough media : ballistic acoustic and elastic waves experience an overall different wave speed even though local wave speed are by construction the same. This is an indication that the physics of acoustic and elastic wave propagation are different. To understand this observation better physically, we propose to rely on the two scale homogenization theory for both elastic waves (Backus 1962, Capdeville et al. 2010a;b) and acoustic waves (treated as a special case of Guillot et al. (2010)). This is the purpose of the next section.

2.2.2 Homogenization for the wave propagation problem

In general, the two-scale homogenization method allows to compute large-scale-only 'effective' parameters and equations equivalent to an initial problem with both large and fine scales. It allows first, to better understand physical phenomena where small scales have only an effective role and second, to compute solutions of the initial problem at the effective scale only, thus generally significantly reducing the computing time and/or the meshing problem. Two-scale homogenization techniques have been studied for a long time for various problems in mechanics for periodic or non-periodic media (Auriault et Sanchez-Palencia 1977, Bensoussan et al. 1978, Sanchez-Palencia 1980, Allaire 1992).

For wave propagation problems, two scale homogenization allows to understand how small scale heterogeneities are upscaled - or "seen" - by a long wavelength wavefield and therefore gives the opportunity to explain and interpret observations when the ratio heterogeneity scale versus minimum wavelength is very small compared to 1 : $\varepsilon_0 = \lambda_0 / \lambda_{min} \ll 1$. We first briefly introduce the homogenization procedures for both elastic and acoustic waves in general heterogeneous media. Then, we detail the specific case of layered media - especially the periodic case - as they present some further theoretical results allowing for easier interpretations. Indeed, Backus (1962) showed on the particular case of layered media that the effective elastic stiffness tensor \mathbf{c}^* may carry some effective anisotropy (also called 'extrinsic' anisotropy) computed through a non linear process recalled in the next section.

General 2-scale homogenization

For the wave propagation problem in general heterogeneous non-periodic media, we will use deterministic homogenization procedures as defined in Capdeville et al. (2010b) for the elastic equations and as a special case of Guillot et al. (2010) for the acoustic equations.

For the elastic wave propagation case, assuming the density and elastic properties contain small scale variations with respect to λ_{min} , the order 0 homogenization approximates original equations (2.44,2.45) with :

$$\rho^* \ddot{\mathbf{u}}^* - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{f} \quad (2.56)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{c}^* : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^*) \quad (2.57)$$

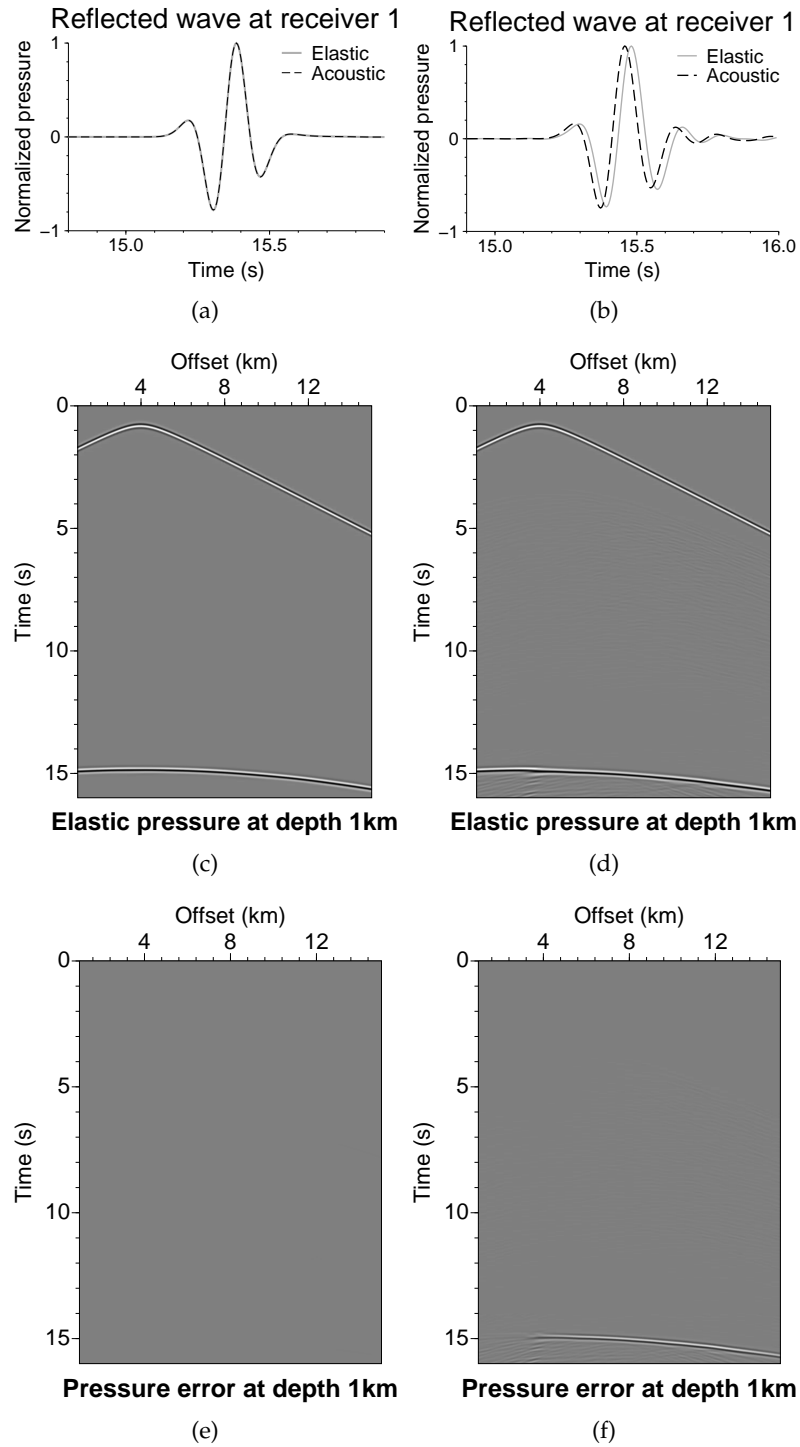


FIGURE 2.9 – Experiment (2) : Random model – Left : smooth medium, right : rough medium ; (2.9(a) and 2.9(b)) : elastic (grey) and acoustic (black) normalized pressure seismograms at receiver 1 ; (2.9(c) and 2.9(d)) : normalized seismogram gathers for the elastic run ; (2.9(e) and 2.9(f)) : gathers of the error between elastic and acoustic normalized pressure seismograms.

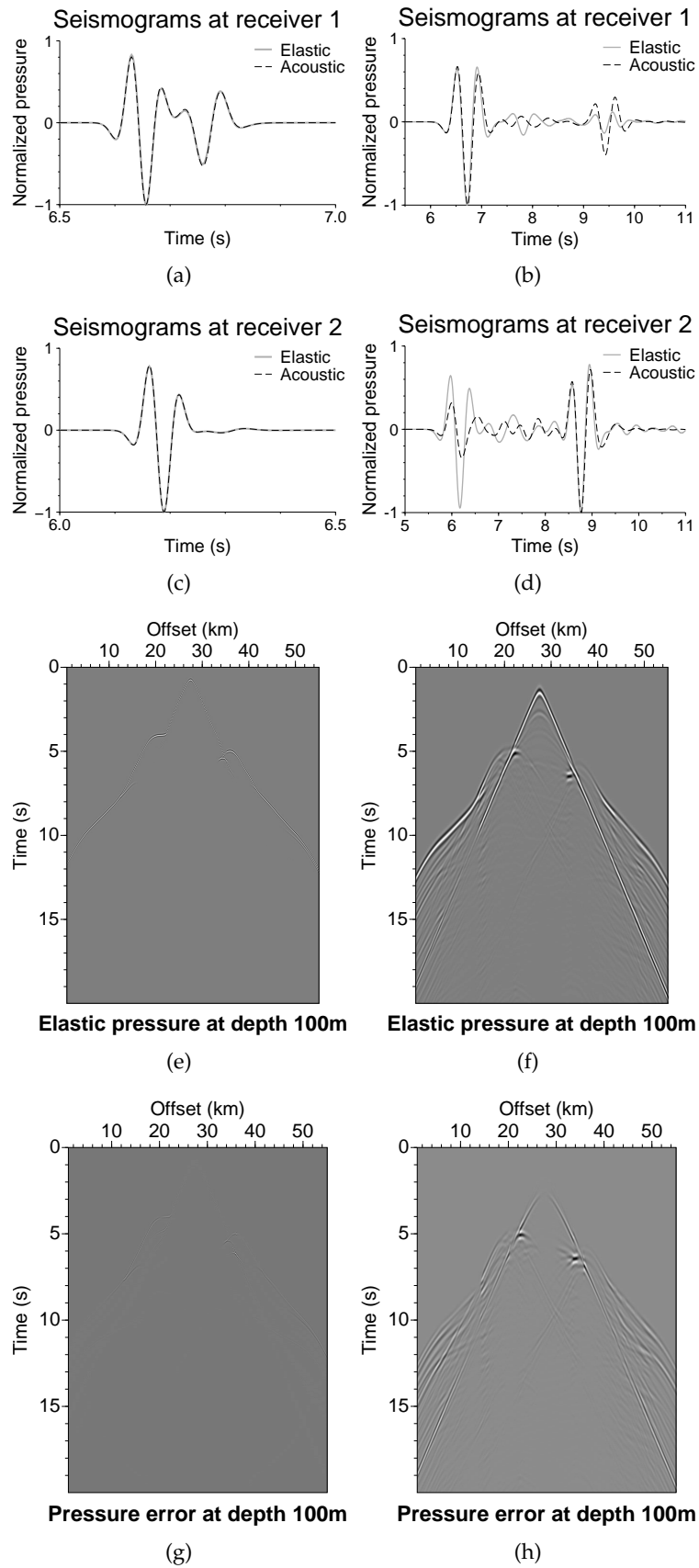


FIGURE 2.10 – Experiment (3) : SEAM-based model – Left : smooth medium, right : rough medium; (2.10(a), 2.10(b)), and (2.10(c), 2.10(d)) : elastic (grey) and acoustic (black) normalized pressure seismograms for receivers 1 and 2 respectively; (2.10(e) and 2.10(f)) : seismogram gathers for the elastic run for reference; (2.10(g) and 2.10(h)) : seismogram gathers for the error between elastic and acoustic runs.

where ρ^* is the effective density, \mathbf{c}^* is the effective order-4 elastic stiffness tensor. The effective displacement and stress (\mathbf{u}^* , $\boldsymbol{\sigma}^*$) approximate the 'real' displacement and stress. Using again a spatial low-pass filter $\mathcal{F}^{\lambda_0}(\cdot)$ with a scale cut-off λ_0 (that is the action of $\mathcal{F}^{\lambda_0}(\cdot)$ removes all variations smaller than λ_0 , see Appendix 2.2.2), the effective density is simply obtained as : $\rho^* = \mathcal{F}^{\lambda_0}(\rho)$. The effective elastic stiffness tensor \mathbf{c}^* can not be obtained by only filtering the initial elastic stiffness tensor \mathbf{c} . General deterministic non periodic homogenization (Capdeville et al. 2010a;b) practically computes the effective elastic stiffness tensor through an order-3 tensor χ - called first order corrector - which is solution to the so called 'starting cell problem' :

$$\nabla \cdot (\mathbf{H}) = 0 \quad (2.58)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{c} : \mathbf{G} \quad (2.59)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{I} + \frac{1}{2} \left(\nabla \chi + {}^T \nabla \chi \right) \quad (2.60)$$

$$\langle \chi \rangle = 0 \quad (2.61)$$

with periodic boundary conditions over the 'cell', where $\langle \cdot \rangle$ is the averaging operator over the cell (see Appendix 2.2.2) and where the cell can be taken as the whole domain. The effective elastic stiffness tensor \mathbf{c}^* is then obtained from the two order 4 intermediate tensors \mathbf{G} and \mathbf{H} with :

$$\mathbf{c}^* = \mathcal{F}^{\lambda_0}(\mathbf{H}) : \mathcal{F}^{\lambda_0}(\mathbf{G})^{-1} \quad (2.62)$$

A complete description of deterministic non periodic homogenization for elastic waves can be found in Capdeville et al. (2010a) (1D case), Capdeville et al. (2010b) (2D P-SV case) and an example of its accuracy is given in Appendix 2.2.2. The effective tensor is in general fully anisotropic, even for isotropic fine scale model, which is well-known since the work of Backus (1962).

For acoustic media, the same homogenization procedure can be carried out. The involved theoretical development is mathematically the same as the one that can be found in Guillot et al. (2010) for elastic SH waves in 2-D. Applied to the acoustic case, we find that, to compute the effective acoustic wavefield, one has to solve for the effective potential q^* and displacement \mathbf{u}^* :

$$\frac{1}{\kappa^*} \ddot{q}^* - \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}}^* = \dot{g} \quad (2.63)$$

$$\dot{\mathbf{u}}^* = \mathbf{L}^* \cdot \nabla q^* \quad (2.64)$$

where $1/\kappa^* = \mathcal{F}^{\lambda_0}(1/\kappa)$ is once again the filtered version of $1/\kappa$ and \mathbf{L}^* is now an order 2 tensor which may carry the effective anisotropy. This tensor \mathbf{L}^* is computed through the acoustic version of the cell problem (as defined in Guillot et al. (2010)), namely by solving over the cell for the vector χ :

$$\nabla \cdot (\mathbf{P}) = 0 \quad (2.65)$$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\rho} \mathbf{Q} \quad (2.66)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} + \nabla \chi \quad (2.67)$$

$$\langle \chi \rangle = 0 \quad (2.68)$$

with periodic boundary conditions over the cell, where $\langle \cdot \rangle$ is the averaging operator over the cell (see Appendix 2.2.2), and where once again the cell is usually taken as the whole domain Ω . The effective tensor L^* is then obtained from the two order 2 intermediate tensors Q and P with :

$$L^* = \mathcal{F}^{\lambda_0}(P) \cdot \mathcal{F}^{\lambda_0}(Q)^{-1} \quad (2.69)$$

In general, L^* is not proportional to the identity, thus leading to an anisotropic effective density. This may appear unusual for the seismology community, however, such an anisotropic effective density has already been encountered for acoustic waves propagating in the so-called sonic crystals (SC), i.e. in fluid with an embedded periodic lattice of cylindrical scatterers (de Hoop 1995, Cummer et Schurig 2007, Torrent et Sánchez-Dehesa 2008), or in layered media with mixed solid and fluids (e.g. Schoenberg 1984).

At this point, we already see that similar fine scale structures may behave very differently at the effective scale level depending on the type of wave propagation considered (acoustic or elastic). From relations (2.65-2.68), it appears that L^* depends only on the spatial distribution of the fine scale density $\rho(\mathbf{x})$ and not on the bulk modulus distribution $\kappa(\mathbf{x})$. On the other hand, from equations (2.59-2.61), it appears that the effective elastic stiffness tensor \mathbf{c}^* only depends on the fine scale elastic stiffness tensor distribution $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ and not on the fine scale density distribution $\rho(\mathbf{x})$. From this observation, one could imagine a medium with a homogeneous fine scale elastic distribution and an heterogeneous density distribution. This would lead to isotropic effective parameters in the elastic case and to large anisotropic effective parameters in the acoustic case. To the other extreme, an heterogeneous fine scale elastic distribution and a homogeneous density distribution would lead to anisotropic effective parameters in the elastic case and to isotropic effective parameters in the acoustic case. Moreover, the fact that the effective 'density tensor' L^* is only an order 2 tensor in 2-D allows only an elliptic anisotropy whereas the effective \mathbf{c}^* is an order 4 tensor in 2-D allowing more different types of anisotropy as illustrated on a very simple case in Figures 2.11(b) and 2.11(c).

As we can see, if the upscaling problems of the elastic and acoustic wave cases are formally very similar they involve different quantities. From the two upscaling problems, there is no reason to expect the same properties from an elastic upscaling and from an acoustic upscaling. Therefore, even if we can build related acoustic and elastic problems at small scale, the respective effective acoustic and elastic media, the ones indeed "seen" by the wavefield, have little chance to be related which explains the numerical observations made in the previous section. To investigate this aspect further, we study in the next section a simple particular medium case.

Isotropic stratified media

A very useful medium configuration in seismic wave modelling and upscaling is the isotropic stratified medium. This layered medium case reduces to a 1-D problem and displays analytical expressions for computing the effective coefficients as shown by Backus (1962) for the elastic

case. Moreover, when layers follow a periodic structure, effective parameters remain constant over the whole domain. This allows to build simple test cases leading to easy interpretation of the results. As an example, we will use the isotropic periodic 2-layer horizontally stratified medium described in Figure 2.11(a). In each layer, density is set using a contrast of 13% around its average value, and Lamé parameters λ and μ are set using contrasts of 50% and 68% around their average value respectively (setting approximatively $\kappa = \lambda + 2\mu$ with a contrast of 68% around its average value). Each layer is $25m$ thick, setting the medium's period to $50m$. The source maximum frequency is set such that the minimum wavelength is $\lambda_{P_{min}} = 400m$, which is indeed much larger than the period ($\varepsilon_0 = 0.125$). Snapshots of the energy at $t = 5s$ are shown in Figure 2.11(b) for the elastic case and in Figure 2.11(c) for the acoustic case, and illustrate the effective anisotropies in each case. In this experiment, three major observations arise :

1. elastic (diamond shaped wave front) effective anisotropy is more complex than acoustic (elliptic) anisotropy ;
2. for similar parameters, the acoustic effective anisotropy is weak compared to the elastic effective anisotropy ;
3. effective elastic P-wave and acoustic wave velocities are identical in the vertical direction.

The first point is directly related to the general homogenization procedures for elastic and acoustic waves developed in the previous section : the different dimensions of the effective elastic and acoustic tensors explain the different natures of the effective anisotropies.

In the following, we focus on the specific analytic results from the homogenization for isotropic stratified media which allow to explain in detail the last two observations.

For 2-D elastic periodic stratified media, effective quantities are computed over the periodic cell as (Backus 1962) :

$$\mathbf{c}_{1111}^* = \left\langle \lambda + 2\mu - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \right\rangle + \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^2, \quad (2.70)$$

$$\mathbf{c}_{2222}^* = \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1}, \quad (2.71)$$

$$\mathbf{c}_{1212}^* = \left\langle \frac{1}{\mu} \right\rangle^{-1}, \quad (2.72)$$

$$\mathbf{c}_{1122}^* = \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle, \quad (2.73)$$

$$\rho^* = \langle \rho \rangle, \quad (2.74)$$

where $\langle . \rangle$ denotes the averaging operator over the periodic cell (see Appendix 2.2.2).

In 2-D acoustic periodic stratified media, the effective density tensor's analytical expression is computed similarly as for a static scalar problem (Lurie et Cherkaev 1986, Bosse et R.E. 1989, Hornung 1992) and effective

parameters are then given by :

$$\mathbf{L}^* = \begin{bmatrix} \left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle & 0 \\ 0 & \frac{1}{\langle \rho \rangle} \end{bmatrix}, \quad (2.75)$$

$$\frac{1}{\kappa^*} = \left\langle \frac{1}{\kappa} \right\rangle. \quad (2.76)$$

Therefore in order to upscale such a medium only 3 simple quantities need to be computed : $\langle \rho \rangle$, $\langle 1/\rho \rangle$ and $\langle 1/\kappa \rangle$.

At this point, the effective kinematic equivalence between elastic P-waves and acoustic waves in the vertical direction (observation 3) can easily be confirmed. Indeed, noticing that for our acoustic parameterization $\kappa = \rho V^2 = \rho V_P^2 = \lambda + 2\mu$, and using (2.71), (2.74), \mathbf{L}_{22}^* expression from (2.75), and (2.76), we obtain :

$$V_{PV}^* = \sqrt{\frac{\mathbf{c}_{2222}^*}{\rho^*}} = \sqrt{\kappa^* \mathbf{L}_{22}^*} = V_V^* \quad (2.77)$$

which means that elastic P-waves and acoustic waves travel vertically with the same effective velocity (respectively V_{PV}^* and V_V^*).

To explain the differences in amplitude of effective anisotropies (observation 2), we use a “Thomsen-like” (Thomsen 1986) measurement of anisotropy, ϵ , in both elastic and acoustic cases. In the elastic case, ϵ is exactly the Thomsen parameter $\epsilon = (\mathbf{c}_{1111}^* - \mathbf{c}_{2222}^*) / (2\mathbf{c}_{2222}^*)$, which, for a 2-layered medium, can be computed as :

$$\epsilon = \frac{\nu_\kappa^2}{2(1 - \nu_\kappa^2)} \left[1 - \left(\frac{\langle \lambda \rangle}{\langle \kappa \rangle} \frac{\nu_\lambda}{\nu_\kappa} \right)^2 \right], \quad (2.78)$$

where $\kappa = \lambda + 2\mu$ with λ and μ the Lamé parameters, $\langle \lambda \rangle$ and $\langle \kappa \rangle$ denote the average values of λ and κ respectively, and ν_λ and ν_κ are their respective contrasts.

In the acoustic case, we similarly use $\epsilon = (\mathbf{L}_{11}^* - \mathbf{L}_{22}^*) / (2\mathbf{L}_{22}^*)$, which, for a 2-layered medium, can be computed as :

$$\epsilon = \frac{\nu_\rho^2}{2(1 - \nu_\rho^2)}, \quad (2.79)$$

where ν_ρ is the contrast on the density.

First, we note that relations (2.78) and (2.79) show some formal similarities as both of them relate effective anisotropy to contrasts on the heterogeneities with the following pattern : the higher the contrasts are ($\nu \rightarrow 1$), the more important the effective anisotropy is. In our example, contrast on density was much smaller than contrasts on Lamé parameters and we therefore have $\epsilon \simeq 38.7\%$ in the elastic case corresponding to a strong anisotropy, while we have $\epsilon \simeq 0.9\%$ in the acoustic case, corresponding to almost no anisotropy as observed. However, (2.78) and (2.79) show directly that the important quantities related to effective anisotropy are fundamentally different between the elastic and the acoustic cases. In the elastic case, effective anisotropy depends only on contrasts on the

Lamé parameters while in the acoustic case, effective anisotropy depends only on contrasts on the density. Therefore, if effective anisotropies were already of different kinds (observation 1), relations (2.78) and (2.79) show very simply in the periodic 2-layer media case that they are also different in their strength as density's contrasts and Lamé parameters' contrasts are not necessarily correlated, especially for shallow geological structures of the earth. Figure 2.11(d) shows the result for an attempt to build a 2-layer acoustic medium at the microscopic scale with effective kinematic equivalence at least for both radial and transverse directions with the elastic case (i.e. to obtain identical values of ϵ for the elastic and acoustic cases). In order to obtain such a selective effective kinematic equivalence (acoustic effective anisotropy remains elliptic which still does not account correctly for the diamond shaped elastic effective anisotropy), the construction at the microscopic level of acoustic parameters from the elastic parameters can be easily devised (in a non unique way though, and using effective elastic parameters) for 2-layer periodic media. However, such a mapping between elastic and acoustic parameters is only a mathematical transformation and the physical meaning of the acoustic parameters is here lost. Unfortunately, only a simple kinematic equivalence can be achieved following this process. Moreover, this mapping in a two layer case cannot be easily extended to more complex cases, such that we didn't search any further for such kinematic equivalences. At last, very similar results can be obtained for the continuous case of experiment (1). In particular the vertical effective kinematic equivalence can be seen through the dependence of the error with offset : for low offsets, waves propagate nearly vertically and no delay has to be observed whereas for larger offset full anisotropy has to be considered for phase comparison of the signals. Then, lower contrast on the density compared to contrasts on the elastic moduli implies that acoustic effective anisotropy is weaker than elastic effective anisotropy, which corresponds to the observed delay of the acoustic signal toward the elastic signal.

Conclusion

The acoustic approximation of elastic waves is a common approximation in exploration geophysics. In the present work, we have addressed the validity of this approximation regarding small heterogeneity scales with respect to the wavelength of the wavefield. We have shown that, if the approximation remains valid for isotropic homogeneous media or isotropic heterogeneous media with smooth variations with respect of the wavefield's wavelength, for heterogeneous rough media, i.e. when variations in the elastic parameters are small compared to the wavelengths of the wavefield, this approximation is not reliable anymore. Indeed, forgetting about amplitude errors due to unmodeled P-to-S conversions by acoustic equations, phase errors still arise due to differences in kinematics perceived by the waves between the elastic and acoustic case. Homogenization procedures - for acoustic waves on one hand and for elastic waves on the other hand - offer a way to understand the differences in effective kinematics through the computation of effective parameters and effective anisotropy. Two main reasons arise to explain such effective kinematic dif-

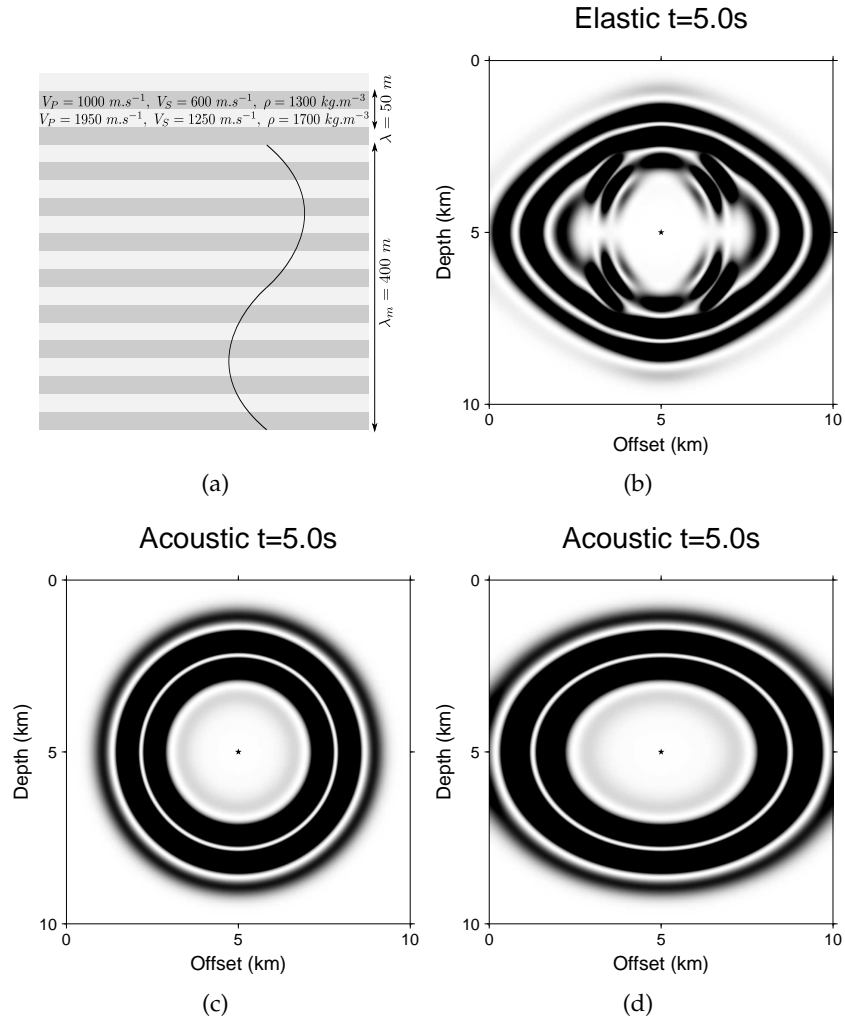


FIGURE 2.11 – Visualisation of effective anisotropy on a 2-layer periodic medium in the elastic and acoustic cases. 2.11(a) : Original elastic medium, 2.11(b) : snapshot of the elastic wavefield, 2.11(c) : snapshot of the acoustic wavefield, 2.11(d) : snapshot of the acoustic wavefield computed in a medium devised from the original elastic medium with the intent to respect effective kinematics in both horizontal and vertical directions.

ferences. First, acoustic effective anisotropy, which is carried by an effective anisotropic density, is systematically reduced to an elliptic anisotropy while elastic effective anisotropy does not suffer such restriction. Second, even if acoustic parameters are related to elastic parameters at the original small scale it is generally not the case anymore for effective parameters because relevant quantities for computing effective parameters (density for the acoustic case, elastic moduli for the elastic case) are not the same. If these two results are available for general heterogeneous media, the particular case of stratified periodic media allowed a more detailed investigation by offering clear relations between parameters of the micro scale medium and effective anisotropy.

Our work shows that if using the acoustic approximation for numerical experiments for full waveform inversion is still possible and pertinent, some care has to be given on what parameters to work on to fully mimic the elastic case. Indeed, it is sometime the $1/\kappa$ parameter that is chosen to work on and to be inverted for (*e.g.* Métivier et al. (2013)). Such a choice is equivalent to work on and to invert only for the density in the elastic case, which is possible, but missing a lot of the realistic complexity. Inverting for the density, or better for L , is a better choice, that makes it possible to account for some of the elastic complexity still in the acoustic framework.

In the end, using equations of acoustics as an acoustic approximation for elastic P-waves seemed natural at first but this approximation remains too simple to keep a good accuracy and a physical equivalence in highly heterogeneous - or 'rough' - media.

Acknowledgments

This work was funded by the ANR blanche "mémé" grant (ANR-10-BLAN-613 MEME). Computations were performed on the CCIPL computer "Erdre". We thank Gaetano Festa for letting us use and modify his 2-D spectral element program and James Rickett for letting us use and modify the 2-D crosscut of SEG's SEAM model. Last but not least, we want to thank Pr. Fichtner, Pr. Oprsal, and four other anonymous reviewers for their numerous constructive comments, which allowed to improve significantly the quality of this paper.

Appendix A - From elastic to acoustic equations : the homogeneous isotropic case

The only case for which the elastic and acoustic wave equations can exactly be related is for an infinite isotropic homogeneous domain and for an explosive isotropic source. In such a case, acoustic equations derive from elastic equations as follows. In an isotropic homogeneous domain, the elastic medium is fully described by its density ρ and the two Lamé parameters λ and μ , which are constant over the domain. Then, using (2.47) in (2.44), we obtain :

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} - \lambda \nabla \cdot [(\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I}] - \mu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}) - \mu \nabla \cdot \left({}^T \nabla \mathbf{u} \right) = \mathbf{f}. \quad (2.80)$$

where $\mathbf{f} = \nabla (\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \text{Ricker}(t))$ is the explosive source term, with \mathbf{x}_0 the position of the source, $\delta(\mathbf{x})$ the Dirac distribution, and $\text{Ricker}(t)$ the

source time function as a Ricker. Using the following identities :

$$\nabla \cdot [(\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I}] = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (2.81)$$

$$\nabla \cdot \left({}^T \nabla \mathbf{u} \right) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (2.82)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) \quad (2.83)$$

the elastic wave equation can be rewritten as :

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} - \nabla [(\lambda + 2\mu) \nabla \cdot \mathbf{u}] + \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \mathbf{f} \quad (2.84)$$

where $\nabla \times \mathbf{u}$ denotes the curl operator over vector \mathbf{u} .

Assuming that the source is not generating shear waves, only P waves are propagating in Ω and, knowing that P waves are irrotational, we have $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$. In such a case, the displacement vector \mathbf{u} , or the velocity vector $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$, derives from a potential q . The density being constant, we can choose the potential q such as :

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} = \frac{1}{\rho} \nabla q \quad (2.85)$$

Differentiating (2.84) over time, using (2.85), assuming the source also derives from a potential g such that :

$$\mathbf{f} = \nabla ((\lambda + 2\mu) g), \quad (2.86)$$

which is possible with the explosive source mentioned above, and setting $\kappa = \lambda + 2\mu = \rho V_P^2$, we obtain :

$$\nabla \left(\frac{1}{\kappa} \ddot{q} - \nabla \cdot \mathbf{v} - \dot{g} \right) = 0 \quad (2.87)$$

which implies (2.50). Therefore, in an infinite homogeneous isotropic medium with the acoustic density set to the elastic density and the sound speed set exactly to the elastic P-waves velocity, $V = V_P$, and assuming that no shear wave has been generated by the source, the acoustic equations (2.50, 2.51) have the same solution as the elastic wave equations.

Appendix B - Filtering and averaging operators

We define here the averaging $\langle \cdot \rangle$ and filtering $\mathcal{F}^{\lambda_c}(\cdot)$ operators. For a quantity $h(\mathbf{x})$ defined over a 2D cell Ω , the corresponding average is defined as

$$\langle h \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.88)$$

where $|\Omega|$ is a measure (e.g. the area) of the cell.

For any function h , we define its 2D Fourier transform as

$$\hat{h}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^2} h(\mathbf{x}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.89)$$

where \mathbf{x} is the position vector and \mathbf{k} is the wavenumber vector. For any wavenumber vector \mathbf{k} we define its associated wavelength $\lambda_{\mathbf{k}} = 2\pi/|\mathbf{k}|$.

To remove any spatial variations smaller than λ_c of a function $h(\mathbf{x})$ we define the low-pass filter operator $\mathcal{F}^{\lambda_c}(\cdot)$ as

$$\mathcal{F}^{\lambda_c}(h)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} h(\mathbf{x}') w_{\lambda_c}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (2.90)$$

where w_{λ_c} is a wavelet. Ideally, w_{λ_c} is such that

$$\hat{w}_{\lambda_c}(\mathbf{k}) = \begin{cases} 1 & \text{for } |\mathbf{k}| \leq k_c, \\ 0 & \text{for } |\mathbf{k}| > k_c, \end{cases} \quad (2.91)$$

where $k_c = 2\pi/\lambda_c$. In practice, we use a wavelet with a finite spatial support. We first define the mother wavelet $w(\mathbf{x})$ such as its power spectrum is

$$\hat{w}(\mathbf{k}) = \begin{cases} 1 & \text{for } |\mathbf{k}| \leq a, \\ \frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(\pi \frac{|\mathbf{k}| - a}{b - a}\right) \right] & \text{for } |\mathbf{k}| \in]a; b[, \\ 0 & \text{for } |\mathbf{k}| \geq b, \end{cases} \quad (2.92)$$

where a and b are two reals around 1 defining the taper transition between 1 and 0 of the low pass filter. The wavelet in the space domain is then obtained with a Hankel transform

$$w(\mathbf{x}) = \int_0^{+\infty} \hat{w}(\mathbf{k}) J_0(|\mathbf{k}||\mathbf{x}|) |\mathbf{k}| d|\mathbf{k}| \quad (2.93)$$

where J_0 is the Bessel function of the first kind of order 0. At last, we define the filter wavelet $w_{\lambda_c}(\mathbf{x})$ of corner frequency $k_c = 2\pi/\lambda_c$ as $w_{\lambda_c}(\mathbf{x}) = k_c w(k_c \mathbf{x})$.

Appendix C - Numerical precision and phase shift

We show here that phase shifts observed between elastic and acoustic pressure signals in the rough cases are not numerical artifacts due to SEM simulations and are related to small scale heterogeneities through the homogenization procedure. To show that there is no precision loss due to spectral element procedure, we use the experiment 2 (random medium) in the rough case configuration with 2 different numerical set-up. The first set-up is defined as previously, with 800×900 square elements of $20 \times 20 m^2$ with constant elastic properties and with 5 GLL points per space direction. The second set-up is different from the first only by refining the mesh (and time step) by a factor 2 in each direction. Figure 2.12(a) shows on the reflected wave recorded at receiver 1 that the first set-up was already converged and the relative error $|(p_1 - p_2)/p_2|$ on the whole pressure signal is no more than 1% for both elastic and acoustic runs.

To numerically show that homogenization theory fully explains the observed phase shifts between elastic and acoustic waveforms we homogenized the random medium of experiment 2 in both elastic and acoustic cases, with an homogenization parameter of $\varepsilon_0 = 0.5$ (which is generally small enough to obtain good accuracy). Then we compute the wavefield in both elastic and acoustic cases using the homogenized media and with the same numerical set-up as in the paper's body (first set-up). We compare then pressure signals computed in the original medium and in the homogenized medium for both the elastic and acoustic cases. Figure 2.12(b)

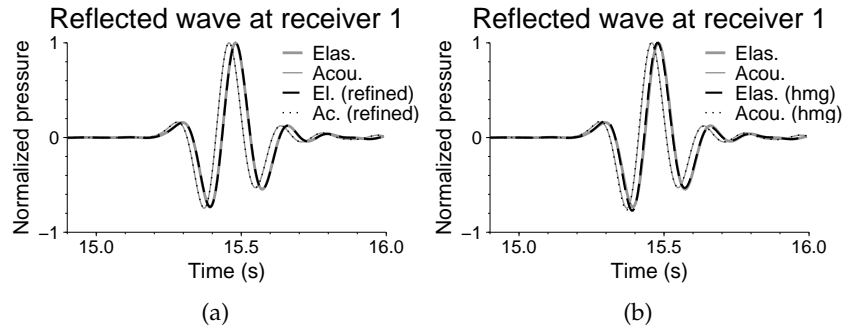


FIGURE 2.12 – Experiment (2), rough medium : Numerical convergence of the SEM computations (Figure 2.12(a)) and of the homogenization procedure (Figure 2.12(b)) on the reflected wave recorded at receiver 1.

shows the waveform recorded at receiver 1 in the time window corresponding to the reflected wave. Further convergence analysis of the homogenization procedure can be found in Capdeville et al. (2010b) for the elastic case and Guillot et al. (2010) for the SH-elastic or acoustic cases.

2.3 COMPLÉMENTS

2.3.1 Homogénéisation des milieux acoustiques stratifiés

Un milieu stratifié se réduit quasiment à un milieu 1D décrit par l'évolution de ses paramètres au travers des couches, en particulier on a $\rho(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}_2)$ d'où $\rho^{\varepsilon, \varepsilon_0} = \rho^{\varepsilon, \varepsilon_0}(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)$. Dans un tel cas, le problème de cellule peut être résolu analytiquement et le tenseur de densité effectif admet une expression analytique. La cellule \mathbf{Y}_x se réduit alors à un segment selon la composante radiale (traversant les couches) \mathbf{y}_2 et, les fonctions considérées étant périodiques on peut alors ramener la cellule \mathbf{Y}_x au segment $[0, Y_2]$. L'opérateur de moyenne sur la cellule $\langle \cdot \rangle$ est alors réduit à l'opérateur de moyenne sur le segment $[0, Y_2]$. En reprenant l'écriture indicelle du problème de cellule (2.23-2.26), on a

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \left(\frac{1}{\rho^{\varepsilon, \varepsilon_0}} \nabla_{\mathbf{y}} \chi_j^{\varepsilon_0} \right) = -\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \left(\frac{1}{\rho^{\varepsilon, \varepsilon_0}} \mathbf{e}_j \right) = -\frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{1}{\rho^{\varepsilon, \varepsilon_0}} \right). \quad (2.94)$$

Pour $j = 1$, on obtient la composante parallèle aux couches $\chi_1^{\varepsilon_0}$ du correcteur en résolvant

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \left(\frac{1}{\rho^{\varepsilon, \varepsilon_0}} \nabla_{\mathbf{y}} \chi_1^{\varepsilon_0} \right) = 0, \quad (2.95)$$

dont la formulation faible sur la cellule est, pour tout ϕ ,

$$\left\langle \frac{1}{\rho^{\varepsilon, \varepsilon_0}} \nabla_{\mathbf{y}} \chi_1^{\varepsilon_0} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \phi \right\rangle = 0, \quad (2.96)$$

où $\langle \cdot \rangle$ est toujours l'opérateur de moyennage par intégration sur la cellule. Choissant $\phi = \chi_1^{\varepsilon_0}$ et $\rho^{\varepsilon, \varepsilon_0}$ étant une fonction définie positive, on a donc $\nabla_{\mathbf{y}} \chi_1^{\varepsilon_0} = 0$ d'où $\chi_1^{\varepsilon_0} = \langle \chi_1^{\varepsilon_0} \rangle$ puis

$$\mathbf{L}_{i1}^{*, \varepsilon_0} = \langle P_{i1}^{\varepsilon_0} \rangle = \left\langle \frac{1}{\rho^{\varepsilon, \varepsilon_0}} (\mathbf{e}_1 + \nabla_{\mathbf{y}} \chi_1^{\varepsilon_0}) \cdot \mathbf{e}_i \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\rho^{\varepsilon, \varepsilon_0}} \right\rangle \delta_{i1} \quad (2.97)$$

avec δ_{ij} le symbole de Kronecker. Pour déterminer $\mathbf{L}_{22}^{*, \varepsilon_0}$, on utilise $j = 2$ dans 2.94 et de par la structure en couches horizontales on néglige les dérivées selon \mathbf{y}_1 (soit $\chi_2^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \chi_2^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)$), d'où $\mathbf{L}_{12}^{*, \varepsilon_0} = 0$ et

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \left(\frac{1}{\rho^{\varepsilon, \varepsilon_0}} \nabla_{\mathbf{y}} \chi_2^{\varepsilon_0} \right) = \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{1}{\rho^{\varepsilon, \varepsilon_0}} \frac{\partial \chi_2^{\varepsilon_0}}{\partial y_2} \right) = -\frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{1}{\rho^{\varepsilon, \varepsilon_0}} \right). \quad (2.98)$$

Par intégrations successives on en déduit

$$\frac{\partial \chi_2^{\varepsilon_0}}{\partial y_2} = -1 + A \rho^{\varepsilon, \varepsilon_0}, \quad (2.99)$$

puis

$$\chi_2^{\varepsilon_0} = -\mathbf{y}_2 + \int_0^{\mathbf{y}_2} A \rho^{\varepsilon, \varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2') d\mathbf{y}_2' + B, \quad (2.100)$$

avec A et B des constantes selon \mathbf{y}_2 et potentiellement des fonctions de \mathbf{y}_1 (même si la géométrie en couches suggère que ce n'est pas le cas). Par périodicité de $\chi_2^{\varepsilon_0}$ sur la cellule on a $\chi_2^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, 0) = \chi_2^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, Y_2)$ d'où

$$A = \frac{1}{\langle \rho^{\varepsilon, \varepsilon_0} \rangle}, \quad (2.101)$$

qui ne dépend effectivement pas de \mathbf{y}_1 et la condition $\langle \chi_2^{\varepsilon_0} \rangle = 0$ permet l'obtention de la constante B . En remarquant que l'expression 2.99 donne $H_{22}^{\varepsilon_0} = A$ on obtient finalement

$$\mathbf{L}^{*, \varepsilon_0} = \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{\rho^{\varepsilon, \varepsilon_0}} \rangle & 0 \\ 0 & \frac{1}{\langle \rho^{\varepsilon, \varepsilon_0} \rangle} \end{pmatrix}. \quad (2.102)$$

Il est ainsi définitivement explicite que le tenseur $\mathbf{L}^{*, \varepsilon_0}$ ne dépend que des propriétés statistiques de la densité de masse aux petites échelles. Il est à noter que l'opérateur $\langle \cdot \rangle$ dénote ici de la moyenne sur la cellule définie en chaque point \mathbf{x} . Dans un milieu VTI quelconque, cette moyenne est variable avec la position et $\mathbf{L}^{*, \varepsilon_0}$ aussi. Dans le cas particulier d'un milieu VTI périodique la moyenne est prise sur la période et la dépendance avec la position n'existe plus et le milieu effectif est constant. Enfin, sauf pour un milieu initial constant (ce qui constitue un cas dégénéré de milieu VTI), on a toujours, par inégalité de Jensen, que

$$\frac{1}{\langle \rho^{\varepsilon, \varepsilon_0} \rangle} < \left\langle \frac{1}{\rho^{\varepsilon, \varepsilon_0}} \right\rangle, \quad (2.103)$$

ce qui signifie que le milieu effectif est toujours anisotrope, d'anisotropie elliptique de petit axe vertical et de grand axe horizontal. En terme de cinématique ceci exprime que la vitesse effective radiale (verticale) V_V^* est plus faible que la vitesse effective transverse (horizontale) V_H^* , soit

$$V_V^* = \sqrt{\kappa^{*, \varepsilon_0} \mathbf{L}_{22}^{*, \varepsilon_0}} < \sqrt{\kappa^{*, \varepsilon_0} \mathbf{L}_{11}^{*, \varepsilon_0}} = V_H^*. \quad (2.104)$$

2.3.2 Milieu stratifié discret et effet de la densité

Pour montrer que le champ d'onde n'est pas sensible aux mêmes paramètres dans le cas élastique et dans le cas acoustique, un cas test simple est d'utiliser un milieu stratifié périodique à deux couches dont la densité varie d'une couche à l'autre mais pour lequel les paramètres élastiques restent constants. Ainsi, les ondes élastiques verront un milieu effectif isotrope, alors que les ondes acoustiques verront un milieu anisotrope. Pour illustrer cet exemple, nous avons utilisé le milieu décrit en Figure 2.13(a). Les fronts d'ondes de la Figure 2.13(b) illustrent alors bien les différents effets qu'ont les petites hétérogénéités de densité sur le champ d'ondes entre le cas d'ondes P élastiques et celui des ondes acoustiques.

2.3.3 Milieu stratifié continu

Dans le test effectué sur le milieu stratifié continu (experiment 1) de la première section de ce chapitre, les paramètres élastiques ρ , \mathbf{c} sont définis

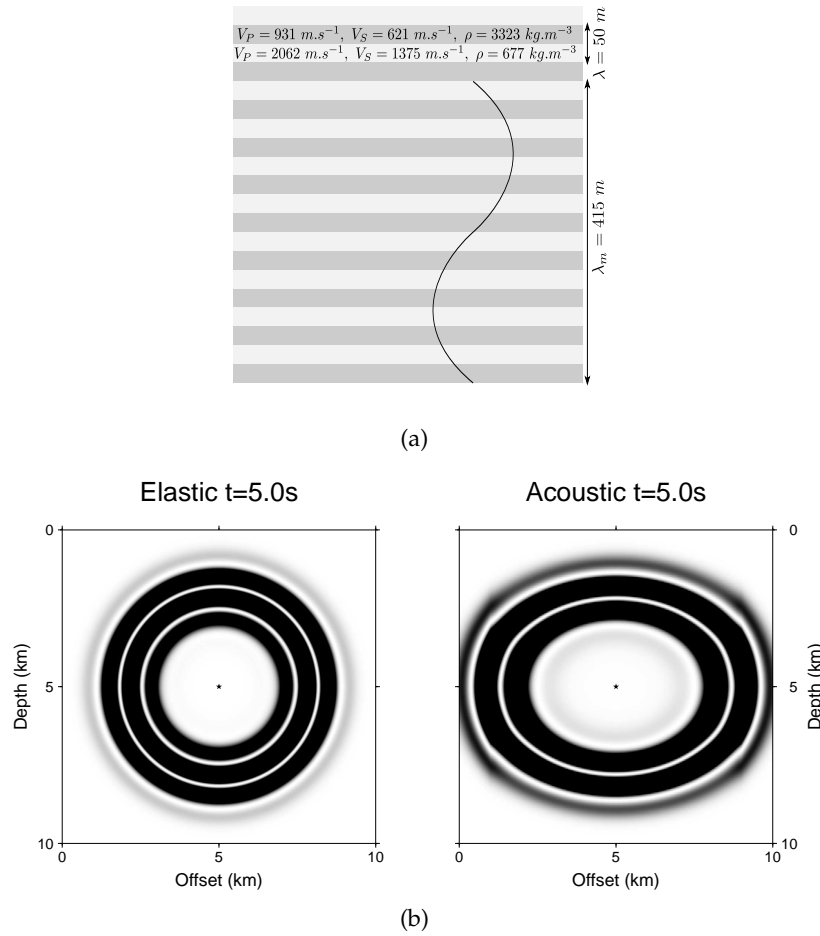


FIGURE 2.13 – Visualisation de l'anisotropie effective pour un milieu périodique à deux phases sur la densité mais dont les paramètres élastiques restent constants. La Figure 2.13(a) définit le milieu élastique initial, la Figure 2.13(b) montre les fronts d'ondes élastique (gauche) et acoustique (droite) à un instant donné.

par leur profil vertical périodique. Les oscillations autour de leur valeur moyenne de ces paramètres sont définies par

$$\rho(\mathbf{x}_2) = \rho_0 \left(1 - \nu_\rho \cos \frac{2\pi \mathbf{x}_2}{\lambda_0} \right) \quad \text{et} \quad (2.105)$$

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}_2) = \mathbf{c}_0 \left(1 - \nu_{\mathbf{c}} \cos \frac{2\pi \mathbf{x}_2}{\lambda_0} \right). \quad (2.106)$$

Dans le cadre de l'approximation acoustique, la paramétrisation effective est alors (voir Annexe B)

$$L_{11}^* = \left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle = \frac{1}{\langle \rho \rangle \sqrt{1 - \nu_\rho^2}}, \quad (2.107)$$

$$L_{22}^* = \frac{1}{\langle \rho \rangle}, \quad (2.108)$$

$$\kappa^* = \left\langle \frac{1}{\mathbf{c}_{2222}} \right\rangle = \frac{1}{\langle \kappa \rangle \sqrt{1 - \nu_{\mathbf{c}}^2}}. \quad (2.109)$$

On en déduit

$$\epsilon = \frac{L_{11}^* - L_{22}^*}{2L_{22}^*} = \frac{1 - \sqrt{1 - \nu_\rho^2}}{2\sqrt{1 - \nu_\rho^2}}, \quad (2.110)$$

$$V_H^* = \sqrt{1 + 2\epsilon} V_V^* = \frac{1}{(1 - \nu_\rho^2)^{\frac{1}{4}}} V_V^*. \quad (2.111)$$

Le fait que $\sqrt{1 + 2\epsilon} < 1\%$ pour $\nu_\rho < 20\%$ implique une anisotropie extrêmement faible pour les faibles contrastes de densité (pratiquement invisible).

2.3.4 Équivalence cinématique bidirectionnelle dans un milieu stratifié discret à 2 couches

Dans le cadre de l'approximation acoustique des ondes P élastiques (section précédente de ce chapitre), dans le cas du milieu stratifié périodique à deux couches, nous évoquons la possibilité de construire des paramètres microscopiques d'un milieu acoustique à partir des paramètres microscopiques du milieu élastique original, avec l'objectif de respecter la cinématique dans les deux directions privilégiées (radiale et transverse). Une telle paramétrisation acoustique ne permet cependant pas l'équivalence directe entre densité élastique et densité acoustique d'une part et module élastique c_{2222} et module de compressibilité κ d'autre part. Nous détaillons ici une méthode de construction d'un milieu acoustique à deux couches permettant une telle équivalence cinématique (qui restera cependant limitée aux deux directions privilégiées). On considère donc un milieu élastique à deux couches, numérotées 1 et 2 et de même épaisseur h , répétées périodiquement et paramétrisé par la densité (ρ_1, ρ_2) et les deux paramètres de Lamé (λ_1, λ_2) et (μ_1, μ_2) . On cherche alors à construire une paramétrisation acoustique la plus simple possible, idéalement il s'agit d'une correspondance point à point des paramètres acoustiques avec une combinaison algébrique des paramètres élastiques initiaux, à partir de cette configuration élastique. On considère donc un milieu acoustique périodique de même période que le milieu élastique et respectant sa structure. On conserve donc un milieu à deux couches, avec les mêmes épaisseurs de couches, de même périodicité $2h$. La paramétrisation recherchée consiste en une densité acoustique (ρ_{a1}, ρ_{a2}) et le module de compressibilité (κ_1, κ_2) .

Les conditions d'équivalence cinématique pour les directions radiale (verticale) et transverse (horizontale) s'écrivent respectivement

$$V_{PV}^{*2} = \frac{c_{2222}^*}{\langle \rho \rangle} = \frac{\langle \frac{1}{\kappa} \rangle^{-1}}{\langle \rho_a \rangle} = L_{22} \kappa^* = V_V^{*2}, \quad (2.112)$$

$$V_{PH}^{*2} = \frac{c_{1111}^*}{\langle \rho \rangle} = \left\langle \frac{1}{\kappa} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{1}{\rho_a} \right\rangle = L_{11} \kappa^* = V_H^{*2}, \quad (2.113)$$

où les grandeurs étoilées correspondent aux grandeurs homogénéisées (relations 2.70-2.71 et 2.75-2.76).

Le rapport membre à membre de ces relations fournit

$$\langle \rho_a \rangle \left\langle \frac{1}{\rho_a} \right\rangle = \frac{c_{1111}^*}{c_{2222}^*} = 1 + 2\epsilon, \quad (2.114)$$

avec comme précédemment $\epsilon = \frac{c_{1111}^* - c_{2222}^*}{2c_{2222}^*}$ une mesure d'anisotropie (Thomsen 1986). Cette relation impose une condition sur le contraste ν_{ρ_a} sur la densité acoustique. En effet, pour $\rho_a = \langle \rho_a \rangle (1 \pm \nu_{\rho_a})$, on a $\left\langle \frac{1}{\rho_a} \right\rangle = \frac{1}{1 - \nu_{\rho_a}^2} \frac{1}{\langle \rho_a \rangle}$ et la condition 2.114 impose alors $\frac{1}{1 - \nu_{\rho_a}^2} = 1 + 2\epsilon$, soit finalement

$$\nu_{\rho_a} = \sqrt{\frac{2\epsilon}{1 + 2\epsilon}}. \quad (2.115)$$

Ceci implique premièrement que la densité acoustique ρ_a doit *a priori* être reconstruite (on ne peut pas directement utiliser la densité élastique ρ), et deuxièmement que cette reconstruction nécessite le calcul des paramètres effectifs, au minimum le paramètre ϵ d'anisotropie effective. Une paramétrisation très simple consiste alors à conserver la densité moyenne sur les couches $\langle \rho_a \rangle = \langle \rho \rangle$. Ce choix, avec les relations 2.112 et 2.71 suggère d'identifier point à point le module de compressibilité κ avec le module élastique $c_{2222} = \lambda + 2\mu$. On construit finalement le milieu acoustique permettant l'équivalence cinématique bidirectionnelle grâce à

$$\rho_{a1} = \langle \rho \rangle \left(1 + \sqrt{\frac{2\epsilon}{1 + 2\epsilon}} \right), \quad (2.116)$$

$$\rho_{a2} = \langle \rho \rangle \left(1 - \sqrt{\frac{2\epsilon}{1 + 2\epsilon}} \right), \quad (2.117)$$

$$\kappa_i = \lambda_i + 2\mu_i, \quad \forall i \in \{1, 2\}. \quad (2.118)$$

Dans le cas de l'expérience décrite en Figure 2.11, on a $\langle \rho_a \rangle = 1500 \text{ kg.m}^{-3}$ et $\nu_{\rho_a} \simeq 63.6\%$ soit un facteur 5 environ avec le contraste de la densité élastique initiale.

En définitive, cet exemple montre que construire un milieu stratifié acoustique au niveau microscopique permettant une équivalence cinématique effective bidirectionnelle (direction radiale et transverse) avec un milieu élastique stratifié est possible mais indirect au sens où elle nécessite de calculer les paramètres élastiques effectifs et que la densité élastique initiale n'intervient plus qu'en terme de sa moyenne. L'intérêt de cette construction paraît alors limité; non seulement l'équivalence n'est que bidirectionnelle, non seulement l'anisotropie effective élastique potentiellement complexe reste mal approximée par l'anisotropie effective acoustique elliptique pour toute autre direction, mais de plus son caractère indirect, il est nécessaire de calculer le milieu effectif élastique, la rend difficilement généralisable par exemple à des milieux stratifiés localement inclinés (ce qui nécessiterait une analyse des symétries du tenseur élastique effectif), à grand nombre de couches...

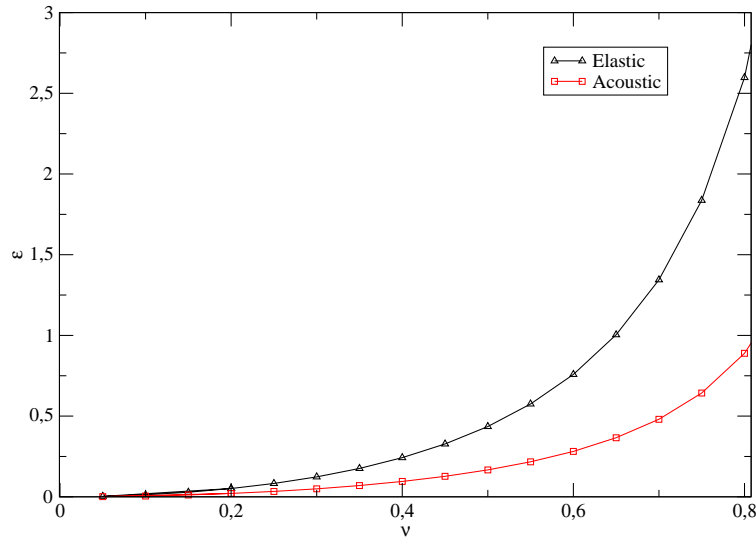


FIGURE 2.14 – Évolution des mesures d'anisotropie ϵ pour les cas élastique (courbe noire) et acoustique (courbe rouge) en fonction de la valeur du contraste d'hétérogénéité ν pour un milieu stratifié périodique à deux couches.

2.3.5 Validité de l'approximation acoustique et contrastes des hétérogénéités

Nous avons discuté la validité de l'approximation des ondes P élastiques par les ondes acoustiques en fonction de la ruguosité du milieu hétérogène. Nous montrons que dans le cas de milieux très rugueux, cette approximation est invalidée du fait de l'apparition de déphasages entre les pressions élastiques et acoustiques. Dans nos deux premiers cas d'étude (milieu stratifié et milieu aléatoire), nous utilisons des contrastes d'hétérogénéités assez importants, qui ne reflètent pas nécessairement les cas réalistes. Une idée naturelle est alors d'étudier la validité de l'approximation acoustique dans le cas des milieux rugueux en fonction du contraste des hétérogénéités. Une telle étude mérite un travail poussé (d'autres paramètres, comme la géométrie du milieu, compliquant encore la tâche) qui dépasse le cadre de cette thèse, cependant nous nous proposons ici de l'initier sur le cas simple du milieu stratifié en traitant à nouveau l'exemple du milieu périodique à deux couches. Dans ce cas, les relations 2.78 et 2.79 liant une mesure de l'anisotropie effective (respectivement élastique et acoustique) aux contraste(s) des hétérogénéités s'appliquent. Nous avons alors fixé les rapports $\langle \kappa \rangle / \langle \rho \rangle$ et $\langle \mu \rangle / \langle \rho \rangle$ entre les quantités moyennées de densité ρ , et des paramètres de Lamé (on rappelle que $\kappa = \lambda + 2\mu$), ainsi que le rapport ν_κ / ν_λ entre les contrastes portant sur différents paramètres de Lamé. De cette manière on peut comparer très facilement les courbes (voir Figure 2.14) d'évolution de la mesure d'anisotropie ϵ en fonction d'un seul paramètre : le contraste ν_ρ ou ν_κ portant sur la densité dans le cas acoustique et sur le module de compressibilité isentropique dans le cas élastique. On constate alors que même pour des valeurs de contrastes similaires l'anisotropie effective élastique est généralement sensiblement plus importante que l'anisotropie acoustique, ce qui implique des déphasages entre les ondes élastiques et acoustiques (au moins pour les temps longs).

CONCLUSION

D'un point de vue physique, utiliser les équations de l'acoustique en milieux fortement hétérogènes semble contraire aux hypothèses conduisant à ces mêmes équations. Mathématiquement cependant, rien ne s'y oppose et le processus d'homogénéisation des équations de l'acoustique est envisageable. Nous avons montré ici que la procédure d'homogénéisation déterministe pour les milieux élastiques non périodiques à 2D (Capdeville et al. 2010b, Guillot et al. 2010) s'adapte parfaitement aux équations de l'acoustique tant théoriquement que numériquement. Concernant l'anisotropie effective induite par les petites échelles du milieu, deux résultats importants apparaissent :

- premièrement, la quantité significative pour déterminer l'anisotropie effective est la densité de masse et,
- deuxièmement, la densité de masse effective devient un tenseur d'ordre 2 anisotrope avec une anisotropie nécessairement elliptique.

Dans le cadre de l'approximation des ondes P élastiques par les ondes acoustiques en milieux hétérogènes, ces résultats permettent alors d'expliquer les déphasages observés entre les signaux de pression issus des modélisations élastiques et acoustiques pour des milieux très hétérogènes. Premièrement, l'anisotropie effective élastique ne se calcule pas à partir des mêmes quantités dans le cas élastique (coefficients du tenseur élastique) et dans le cas acoustique (densité). Deuxièmement, le tenseur de densité effective, portant l'anisotropie effective acoustique, ne permet pas une anisotropie aussi complexe que celle portée par le tenseur élastique effectif.

L'homogénéisation des milieux stratifiés permettant des résultats analytiques, elle permet d'expliquer précisément les différences observées entre les ondes P élastiques et les ondes acoustiques dans le cadre des milieux fortement hétérogènes. Enfin, si l'utilisation des équations de l'acoustique est physiquement discutable dans le cadre des milieux très hétérogènes, elle permet d'illustrer simplement, d'une part, les différences entre la physique des ondes acoustiques et celle des ondes élastiques en milieux hétérogènes, et, d'autre part, comment l'homogénéisation permet de comprendre les effets des petites échelles sur un champ d'ondes.

ANNEXE A

Soit le problème de cellule défini sur la cellule \mathbf{Y}_x et de solution le vecteur χ^{ε_0}

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\mathbf{P}^{\varepsilon_0}) = 0, \quad (2.119)$$

$$\mathbf{P}^{\varepsilon_0} = \mathbf{L}^{\varepsilon_0} \mathbf{Q}^{\varepsilon_0}, \quad (2.120)$$

$$\mathbf{Q}^{\varepsilon_0} = \mathbf{I} + \nabla_{\mathbf{y}} \chi^{\varepsilon_0}, \quad (2.121)$$

$$\langle \chi^{\varepsilon_0} \rangle = 0, \quad (2.122)$$

avec condition de périodicité aux bords et où $\mathbf{P}^{\varepsilon_0}$ et $\mathbf{Q}^{\varepsilon_0}$ sont des tenseurs intermédiaires d'ordre 2, $\nabla_{\mathbf{y}} \chi^{\varepsilon_0}$ représente la matrice jacobienne de χ^{ε_0} , $(\nabla_{\mathbf{y}} \chi^{\varepsilon_0})_{ij} = \frac{\partial \chi_i^{\varepsilon_0}}{\partial y_j}$ et $\mathbf{L}^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est un tenseur d'ordre 2 paramétrisant le problème. En posant $\mathbf{L}^{*,\varepsilon_0} = \langle \mathbf{P}^{\varepsilon_0} \rangle$, où $\langle \cdot \rangle$ représente la moyenne sur la cellule \mathbf{Y}_x , on a alors les résultats suivants :

- si $\mathbf{L}^{\varepsilon_0}$ est symétrique alors le tenseur $\mathbf{L}^{*,\varepsilon_0}$ est symétrique,
- si $\mathbf{L}^{\varepsilon_0}$ est défini positif alors $\mathbf{L}^{*,\varepsilon_0}$ est défini positif.

Preuve : On suppose que $\mathbf{L}^{\varepsilon_0}$ est symétrique. Le problème de cellule (2.119-2.122) s'écrit sous forme indicielle : pour tout \mathbf{x} fixé et pour tout j , résoudre pour $\chi_j^{\varepsilon_0}$ sur la cellule périodique \mathbf{Y}_x

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\mathbf{L}^{\varepsilon_0} \cdot (\mathbf{e}_j + \nabla_{\mathbf{y}} \chi_j^{\varepsilon_0})) = 0, \quad (2.123)$$

$$\langle \chi_j^{\varepsilon_0} \rangle = 0, \quad (2.124)$$

avec conditions périodiques aux bords de la cellule et où \mathbf{e}_j est le vecteur unitaire dans la direction j de l'espace. Considérant l'espace fonctionnel $\mathcal{W}_{\mathbf{Y}_x}$ des fonctions périodiques sur \mathbf{Y}_x , muni du produit scalaire $(f, g) = \frac{1}{|\mathbf{Y}_x|} \int_{\mathbf{Y}_x} f(\mathbf{y}) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \langle fg \rangle$, la relation 2.123 du problème de cellule s'écrit sous forme faible, résoudre pour $\chi_j^{\varepsilon_0}$ tel que pour tout $\phi \in \mathcal{W}_{\mathbf{Y}_x}$

$$\langle {}^T \nabla_{\mathbf{y}} \phi \cdot \mathbf{L}^{\varepsilon_0} \cdot (\mathbf{e}_j + \nabla_{\mathbf{y}} \chi_j^{\varepsilon_0}) \rangle = 0. \quad (2.125)$$

En remarquant que pour tout i , $\chi_i^{\varepsilon_0} \in \mathcal{W}_{\mathbf{Y}_x}$, on utilise le cas particulier $\phi = \chi_i^{\varepsilon_0}$ pour obtenir, pour tout (i, j)

$$\langle {}^T \nabla_{\mathbf{y}} \chi_i^{\varepsilon_0} \cdot \mathbf{L}^{\varepsilon_0} \cdot (\mathbf{e}_j + \nabla_{\mathbf{y}} \chi_j^{\varepsilon_0}) \rangle = 0, \quad (2.126)$$

que l'on utilise alors dans

$$\mathbf{L}_{ij}^{*,\varepsilon_0} = \langle \mathbf{H}_{ij}^{\varepsilon_0} \rangle = \langle {}^T \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{L}^{\varepsilon_0} \cdot (\mathbf{e}_j + \nabla_{\mathbf{y}} \chi_j^{\varepsilon_0}) \rangle, \quad (2.127)$$

pour finalement obtenir

$$\mathbf{L}_{ij}^{*,\varepsilon_0} = \langle {}^T (\mathbf{e}_i + \nabla_{\mathbf{y}} \chi_i^{\varepsilon_0}) \cdot \mathbf{L}^{\varepsilon_0} \cdot (\mathbf{e}_j + \nabla_{\mathbf{y}} \chi_j^{\varepsilon_0}) \rangle. \quad (2.128)$$

Ainsi, si $\mathbf{L}^{\varepsilon_0}$ est symétrique alors $\mathbf{L}_{ij}^{*,\varepsilon_0} = \mathbf{L}_{ji}^{*,\varepsilon_0}$ c'est-à-dire que $\mathbf{L}^{*,\varepsilon_0}$ est symétrique. De plus, pour un vecteur $\alpha = (\alpha_j)_j$ quelconque de dimension 2 à 2D, 3 à 3D, et indépendant de la position, on a

$$\alpha_i \mathbf{L}_{ij}^{*,\varepsilon_0} \alpha_j = \langle [\alpha_i (\mathbf{e}_i + \nabla_{\mathbf{y}} \chi_i^{\varepsilon_0})] \cdot \mathbf{L}^{\varepsilon_0} \cdot [\alpha_j (\mathbf{e}_j + \nabla_{\mathbf{y}} \chi_j^{\varepsilon_0})] \rangle, \quad (2.129)$$

et donc si $\mathbf{L}^{\varepsilon_0}$ est défini positif alors $\mathbf{L}^{*,\varepsilon_0}$ l'est aussi.

ANNEXE B

Soit A la fonction scalaire, périodique en la variable z de période λ_0 , telle que

$$A(z) = A_0 \left(1 - \nu_A \cos \frac{2\pi z}{\lambda_0} \right), \quad (2.130)$$

où $0 < A_0$ est une constante quelconque et $0 < \nu_A \leq 1$ est un paramètre constant. On a alors

$$\langle A \rangle = \frac{1}{\lambda_0} \int_0^{\lambda_0} A(z) dz = A_0 \quad \text{et} \quad (2.131)$$

$$\left\langle \frac{1}{A} \right\rangle = \frac{1}{A_0 \sqrt{1 - \nu_A^2}}. \quad (2.132)$$

Preuve : 2.131 se déduit immédiatement de

$$\int_0^{\lambda_0} \cos \frac{2\pi z}{\lambda_0} dz = \frac{\lambda_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0. \quad (2.133)$$

Ensuite, on a

$$\left\langle \frac{1}{A} \right\rangle = \frac{1}{\lambda_0 A_0} \int_0^{\lambda_0} \frac{1}{1 - \nu_A \cos \frac{2\pi z}{\lambda_0}} dz = \frac{1}{2\pi A_0} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - \nu_A \cos \theta} d\theta. \quad (2.134)$$

Soit alors g la fonction définie sur $(0, 1)$, telle que

$$g(x) = \frac{1}{x} \left(1 - \sqrt{1 - x^2} \right). \quad (2.135)$$

La fonction g est continue dérivable sur $(0, 1)$, de dérivée

$$g'(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} > 0, \forall x \in (0, 1), \quad (2.136)$$

donc g est continue strictement croissante sur $(0, 1)$. Comme de plus $g(1) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ (car en 0^+ , $g(x) \sim \frac{x}{2}$), la fonction g induit une bijection de $(0, 1)$ sur $(0, 1)$. Ayant $0 < \nu_A \leq 1$, on pose $r = g(\nu_A)$; on a alors $0 < r < 1$ et $\nu_A = \frac{2r}{1+r^2}$. 2.134 devient

$$\left\langle \frac{1}{A} \right\rangle = \frac{1 + r^2}{2\pi A_0} P(r), \quad (2.137)$$

$$P(r) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2 - 2r \cos \theta + 1} d\theta, \quad (2.138)$$

où $P(r)$ est une intégrale de Poisson définie pour $|r| < 1$ et dont la valeur est $P(r) = \frac{2\pi}{1-r^2}$. On a donc

$$\left\langle \frac{1}{A} \right\rangle = \frac{1}{A_0} \frac{1 + r^2}{1 - r^2}, \quad (2.139)$$

dont on déduit 2.132 grâce à l'expression de r en fonction de ν_A .

En notant $I(a) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - a \cos \theta} d\theta$ pour $0 < a < 1$, on a $I(a) = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$.

On obtient alors successivement, pour $0 < a, b < 1$:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{1 - b \cos \theta} d\theta = \frac{1}{b} \int_0^{2\pi} \frac{1 - (1 - b \cos \theta)}{1 - b \cos \theta} d\theta = \frac{I(b) - 2\pi}{b}, \quad (2.140)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{1 - b \cos \theta} d\theta = \frac{1}{b^2} \int_0^{2\pi} \frac{1 - (1 - b \cos \theta)(1 + b \cos \theta)}{1 - b \cos \theta} d\theta = \frac{I(b) - 2\pi}{b^2}, \quad (2.141)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 - a \cos \theta}{1 - b \cos \theta} d\theta = \frac{b - a}{b} I(b) + 2\pi \frac{a}{b}, \quad (2.142)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1 - a \cos \theta)^2}{1 - b \cos \theta} d\theta = \left(\frac{b - a}{b} \right)^2 (I(b) - 2\pi) + 2\pi. \quad (2.143)$$

VARIATION SPATIALE DE LA LONGUEUR D'ONDE DOMINANTE

INTRODUCTION

Pour la modélisation de forme d'onde dans les milieux complexes, l'une des difficultés majeures rencontrée dans l'utilisation de la méthode des éléments spectraux réside dans la génération du maillage. En effet la méthode des éléments spectraux requiert un maillage soumis à deux conditions fortes, les éléments sont des quadrangles à 2D, des hexaèdres à 3D, et toute discontinuité doit être maillée, c'est-à-dire doit rester confinée sur les interfaces des éléments (faces, arêtes, sommets).

Dans le cas de milieux très hétérogènes, générer un maillage qui respecte conjointement ces deux conditions peut s'avérer être une tâche longue et très difficile, notamment à 3D. De plus, en présence de très petites hétérogénéités ces maillages peuvent devenir très fins ou très déformés, ce qui peut considérablement accroître le temps de calcul (notamment au travers de la condition CFL du schéma en temps) ou bien diminuer la précision sur les solutions obtenues. Enfin, considérant qu'un champ d'onde possédant une longueur d'onde minimale λ_{min} assez grande par rapport à la taille des hétérogénéités du milieu ne voit ces hétérogénéités que de manière globale, effective, on comprend que le prix à payer pour le calcul de la forme d'onde paraisse injustifié dans certains cas.

La procédure d'homogénéisation pour les milieux non périodiques vient alors répondre à cette problématique en calculant un milieu effectif possédant deux propriétés intéressantes :

- le milieu effectif est continu,

- le milieu effectif ne contient pas d'oscillations de longueur caractéristique plus petite que λ_0 , où λ_0 désigne la longueur d'onde de coupure du filtre passe-bas de la procédure d'homogénéisation).

Pour calculer la forme d'onde dans le milieu effectif, on peut utiliser la méthode des éléments spectraux avec un maillage, appelé *maillage effectif*, différent du maillage initial. La continuité du milieu effectif élimine totalement la contrainte sur le respect des interfaces physiques par le maillage effectif, ce dernier pouvant alors être simplement défini à partir d'une grille régulière. Cependant, nous avons établi une règle empirique (relation 1.164 ou 1.166) restreignant la taille Δ des éléments du maillage effectif par rapport à la taille Δ_0 des éléments du maillage initial optimal.

Ces relations permettent de définir le rapport de contraction local

$$\tilde{r}(\mathbf{x}) = \frac{\Delta_0}{\Delta} = 1 + \frac{1}{2\tilde{\varepsilon}_0(\mathbf{x})} \quad (3.1)$$

en fonction du rapport $\tilde{\varepsilon}_0(\mathbf{x}) = \frac{\lambda_0}{\lambda_m(\mathbf{x})}$ entre la longueur d'onde de coupure λ_0 du filtre passe-bas de l'homogénéisation et de la longueur d'onde minimale locale $\lambda_m(\mathbf{x})$. On rappelle que cette longueur d'onde minimale locale est définie par la fréquence de coin de la source et la plus petite vitesse de propagation des ondes localement au point $\mathbf{x} \in \Omega$ par la relation 1.161. On interprète $\tilde{\varepsilon}_0(\mathbf{x})$ comme une version locale du paramètre d'homogénéisation $\varepsilon_0 = \frac{\lambda_0}{\lambda_{min}}$, et l'on a toujours $\tilde{\varepsilon}_0(\mathbf{x}) \leq \varepsilon_0$, $\forall \mathbf{x} \in \Omega$. Plus le rapport $\tilde{\varepsilon}_0(\mathbf{x})$ est localement petit, plus $\tilde{r}(\mathbf{x})$ est localement grand et donc plus le maillage effectif doit être localement raffiné par rapport au maillage initial. Ceci peut s'avérer un problème dans deux cas, non exclusifs l'un de l'autre :

- lorsque, pour le milieu ou les ondes considérés, il est nécessaire d'utiliser un très petit ε_0 dans la procédure d'homogénéisation afin d'obtenir une précision suffisante dans le calcul de la forme d'ondes (par exemple via la méthode des éléments spectraux),
- lorsque la longueur d'onde minimale locale $\lambda_m(\mathbf{x})$ subit de fortes variations aux larges échelles sur l'ensemble du domaine, impliquant une restriction locale variable et potentiellement élevée sur le pas du maillage effectif.

Nous présentons un exemple du premier cas dans le chapitre suivant et nous le traitons alors à l'aide de la méthode d'homogénéisation résiduelle. Dans ce chapitre, nous nous attachons à l'étude du second cas que nous dénommons par la suite cas de la variabilité larges échelles de la longueur d'onde minimale (ou dominante). Pour en expliciter d'avantage la problématique, nous commençons par l'illustrer sur le cas réaliste du milieu SEAM (Fehler et Larner 2008) utilisé au chapitre précédent.

De par la relation $\lambda_m = \frac{V_S}{f_c}$, où V_S désigne la vitesse des ondes S (supposée la vitesse des ondes les plus lentes) et f_c la fréquence de coin de la source (que l'on suppose constante, fixée ici à 1 Hz pour simplifier), la cartographie de V_S de la Figure 3.1 est équivalente à celle de λ_m . Ayant alors $\lambda_{min} = 1 \text{ km}$ ($V_{Smin} = 1 \text{ km/s}$), les oscillations de longueur d'onde inférieures à $\lambda_0 = 100 \text{ m}$ sont petites par rapport à la longueur d'onde minimale du champ d'ondes (on a $\varepsilon_0 = 0.1$). On considère ainsi sans risque que les larges échelles sont de l'ordre de 1 km. On observe alors une assez forte variabilité de λ_m aux larges échelles, notamment avec la profondeur. La coupe verticale (Figure 3.1(b)) suggère grossièrement une variabilité larges échelles en plateaux (numérotés de (1) à (4)), le plateau superficiel étant au moins deux fois plus lent que les plateaux plus profonds : dans le plateau (1) on a $\tilde{\varepsilon}_0 = 0.1$ et dans le plateau (4) on a $\tilde{\varepsilon}_0 \simeq 0.05$ ce qui correspond à des facteurs de contraction (relation 3.1) de $\tilde{r} \simeq 50$ sur le plateau (1) et $\tilde{r} \simeq 100$ sur le plateau (3). Ainsi la restriction à imposer sur le maillage effectif est au moins deux fois plus importante dans la zone profonde que dans la zone superficielle ce qui constitue une différence significative dans l'adaptation locale à effectuer pour construire le maillage effectif.

Afin d'optimiser le maillage effectif, il faudrait conserver un facteur de contraction $\tilde{r}(\mathbf{x}) = 1 + \frac{1}{2\tilde{\varepsilon}_0(\mathbf{x})}$ constant et minimal sur tout le domaine, ce

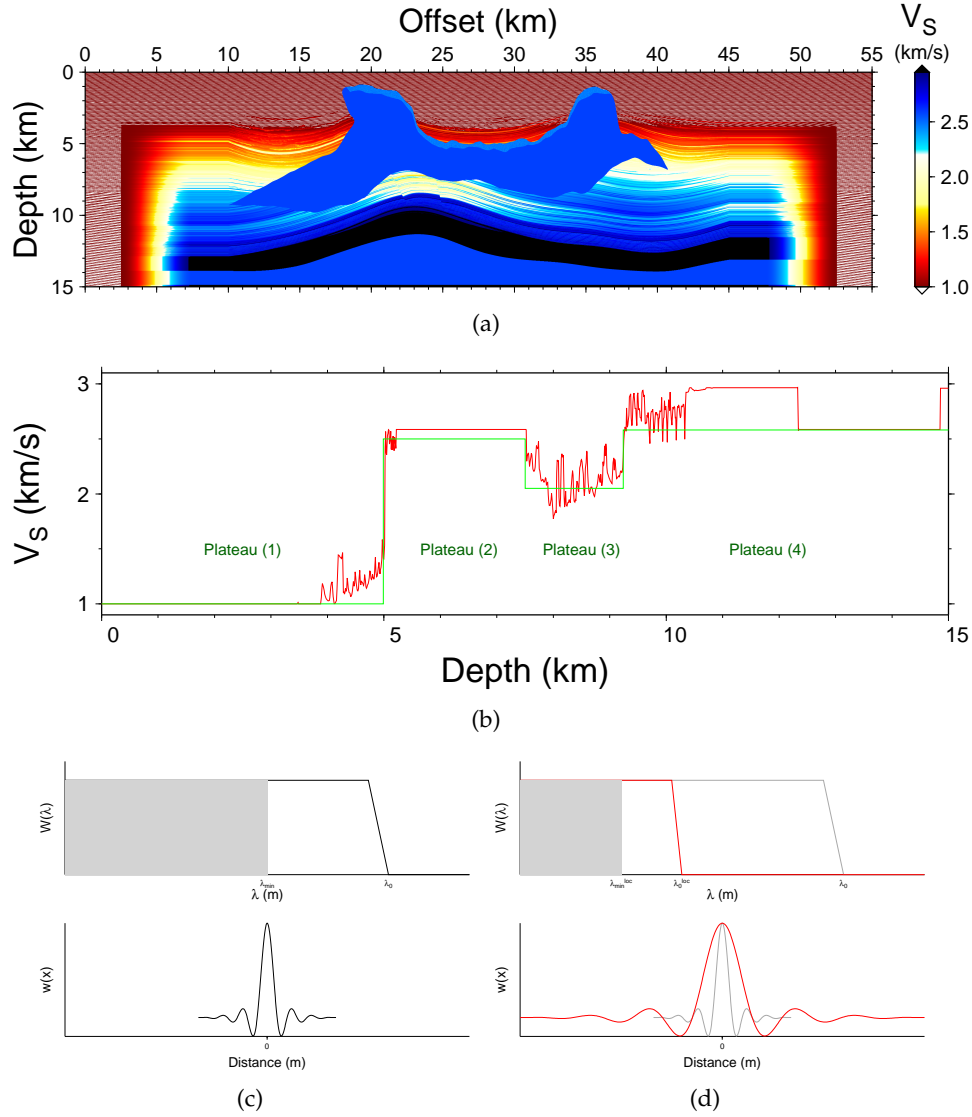


FIGURE 3.1 – Carte 2D de vitesses d’ondes S pour le milieu SEAM (3.1(a)), profil vertical en $x_1 = 27$ km (courbe rouge) avec découpage grossier en plateaux (courbe verte) (3.1(b)), ondelette de filtrage (spectre de puissance et représentation spatiale) pour les plateaux (1) (3.1(c)) et (4) (3.1(d))

qui est équivalent à obtenir que le rapport $\tilde{\varepsilon}_0(\mathbf{x})$ soit constant et maximal, soit $\tilde{\varepsilon}_0(\mathbf{x}) = \varepsilon_0$. À cette fin, les relations précédentes suggèrent d’utiliser un filtre passe-bas dont la longueur d’onde de coupure λ_0 , jusqu’à présent considérée constante, est spatialement variable sur le domaine Ω . Par la suite, nous appelons *homogénéisation à filtre variable* une telle adaptation de la méthode de filtrage dans le processus d’homogénéisation.

Dans ce chapitre nous introduisons une variante de la méthode d’homogénéisation, dénommée *homogénéisation adaptative*, et permettant l’équivalence avec l’homogénéisation à filtre variable tout en en généralisant le concept. Nous définissons d’abord cette variante d’un point de vue général en montrant les modifications sur les aspects théoriques et pratiques de la méthode d’homogénéisation usuelle. Nous introduisons ensuite deux cas particuliers correspondant à des variabilités larges échelles

1D et 2D de la longueur d'onde minimale. Enfin nous testons numériquement ces deux cas pour montrer la validité et les limitations de la méthode.

3.1 FILTRAGE VARIABLE PAR TRANSFORMATION GÉOMÉTRIQUE

Le raisonnement développé en introduction permet d'aboutir à une première idée de construction du filtrage variable par une simple variation avec la position de la longueur d'onde de coupure $\lambda_0 \rightarrow \lambda_0^{loc}(\mathbf{x})$ du filtre spatial $\mathcal{F}^{\lambda_0^{loc}}(\cdot)$ d'homogénéisation. La condition $\tilde{\varepsilon}_0(\mathbf{x}) = \varepsilon_0$, en considérant de plus que $\tilde{\varepsilon}_0 = \frac{\lambda_0^{loc}(\mathbf{x})}{\lambda_m(\mathbf{x})}$, suggère d'utiliser

$$\lambda_0^{loc}(\mathbf{x}) = \varepsilon_0 \cdot \lambda_m(\mathbf{x}) = \lambda_0 \frac{\lambda_m(\mathbf{x})}{\lambda_{min}}, \quad (3.2)$$

comme longueur d'onde de coupure variable. À cette relation correspond une contraction potentielle du support fréquentiel du filtre dans le rapport $\frac{1}{\alpha}(\mathbf{x}) = \frac{\lambda_m(\mathbf{x})}{\lambda_{min}}$ comme illustré en Figures 3.1(c) et 3.1(d) pour les plateaux (1) et (4) respectivement.

Le filtre utilisé dans la méthode d'homogénéisation s'appliquant aux variables rapides \mathbf{y} , indépendantes de \mathbf{x} d'une part, et de par la propriété de contraction/dilatation de la transformée de Fourier (1.92) d'autre part, une telle contraction du support fréquentiel du filtre correspond alors à une dilatation géométrique de l'ondelette de filtrage correspondante (Figures 3.1(c) et 3.1(d)). Le coefficient de dilatation de cette transformation géométrique correspond alors exactement à α

$$\alpha(\mathbf{x}) = \frac{\lambda_{min}}{\lambda_m(\mathbf{x})}. \quad (3.3)$$

À 2D, l'ondelette utilisée dispose d'une symétrie cylindrique qui est conservée par la contraction fréquentielle/dilatation spatiale que nous venons d'introduire. Afin de généraliser cette méthode de filtrage variable, nous effectuons le raisonnement réciproque du précédent et commençons par introduire une transformation géométrique quelconque dans la méthode d'homogénéisation avant de considérer son effet sur le filtre dans le domaine fréquentiel. Cette transformation géométrique introduit une déformation de l'ondelette pouvant éventuellement ne pas respecter sa symétrie cylindrique.

3.1.1 Homogénéisation avec transformation géométrique

Comme pour l'homogénéisation usuelle, on commence par définir les petites échelles λ_0 et le paramètre $\varepsilon_0 = \frac{\lambda_0}{\lambda_{min}}$. Ici, la longueur d'onde de coupure λ_0 du filtre est à nouveau fixe (donc ε_0 aussi) et la variabilité du filtre est totalement prise en charge par la transformation géométrique introduite ci-après. L'étape suivante du processus d'homogénéisation correspond à la définition des variables rapides. C'est ici que l'on introduit une transformation en espace $\xi(\mathbf{x})$ qui définira la déformation de l'ondelette. Ainsi au lieu d'utiliser la relation $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}$ (relation 1.106), on utilise

$$\mathbf{y} = \frac{\xi(\mathbf{x})}{\varepsilon}, \quad (3.4)$$

où la fonction vectorielle ξ doit permettre les développements théoriques de la méthode d'homogénéisation. En particulier elle doit permettre la séparation des variables et la composition avec les opérateurs de dérivation. Asymptotiquement en ε les variables rapides \mathbf{y} et lentes \mathbf{x} doivent pouvoir être considérées comme indépendantes, ce qui impose *a minima* que ξ soit bornée sur le domaine Ω . On peut alors encore une fois interpréter \mathbf{y} comme un échantillonnage rapide au voisinage de \mathbf{x} et, pour chaque \mathbf{x} , il existe une cellule d'échantillonnage $\mathbf{Y}_{\xi(\mathbf{x})}$ bornée qui se déduit de la cellule d'échantillonnage de l'homogénéisation usuelle par la déformation spatiale ξ de la cellule $\mathbf{Y}_{\mathbf{x}}$. La composition avec les opérateurs de dérivation exigent de plus que cette transformation d'espace soit différentiable à différentielles continues sur le domaine Ω . En effet, en notant J_ξ la matrice Jacobienne de ξ ,

$$J_\xi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$, \quad (3.6)$$

les opérateurs de dérivation s'adaptent

$$\nabla(\cdot) \longrightarrow \nabla_{\mathbf{x}}(\cdot) + \frac{1}{\varepsilon} \tilde{\nabla}_{\mathbf{y}}(\cdot), \quad (3.7)$$

$$\nabla \cdot (\cdot) \longrightarrow \nabla_{\mathbf{x}}(\cdot) + \frac{1}{\varepsilon} \tilde{\nabla}_{\mathbf{y}}(\cdot), \quad (3.8)$$

$$\epsilon(\mathbf{u}) \longrightarrow \epsilon_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) + \frac{1}{\varepsilon} \tilde{\epsilon}_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}), \quad (3.9)$$

avec

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{y}}(\cdot) = {}^T J_\xi \cdot \nabla_{\mathbf{y}}(\cdot), \quad (3.10)$$

$$\tilde{\epsilon}_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\tilde{\nabla}_{\mathbf{y}}(\cdot) + {}^T \tilde{\nabla}_{\mathbf{y}}(\cdot) \right), \quad (3.11)$$

et avec une divergence $\tilde{\nabla}_{\mathbf{y}}(\cdot)$ correspondant au gradient transformé $\tilde{\nabla}_{\mathbf{y}}(\cdot)$. Pour ξ telle que J_ξ soit suffisamment régulière, le gradient transformé $\tilde{\nabla}_{\mathbf{y}}(\cdot)$ remplace le gradient de la variable rapide $\nabla_{\mathbf{y}}(\cdot)$ de manière transparente et les procédures théoriques d'homogénéisation, tant élastique qu'acoustique, peuvent être poursuivies sans autre altération ou restriction.

3.1.2 Transformation ξ et filtrage variable

Pour pouvoir enfin véritablement choisir la transformation ξ , il faut en déterminer l'effet sur l'opérateur de filtrage $\mathcal{F}^{\lambda_0}(\cdot)$. On rappelle d'abord qu'une quantité $g(\mathbf{y})$ de la variable d'espace vectorielle rapide \mathbf{y} est filtrée par convolution avec une ondelette w_0 par la relation 1.94 où $\frac{1}{\lambda_0}$ désigne la fréquence (spatiale) de coupure du filtre. La quantité $\mathcal{F}^{\lambda_0}(g)(\mathbf{y})$ ne contient plus d'oscillations de longueur d'onde plus petite que λ_0 . En pratique, cette convolution est effectuée en la variable lente \mathbf{x} pour $\varepsilon = \varepsilon_0$, seule valeur de ε correspondant au problème réel. Dans le cas de l'homogénéisation usuelle, on calcule alors

$$\mathcal{F}^{\lambda_0}(g)(\mathbf{x}) = g * w_0(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} g\left(\frac{\mathbf{x}'}{\varepsilon_0}\right) w_0\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{\varepsilon_0}\right) \frac{d\mathbf{x}'}{\varepsilon_0},$$

où \mathbf{x} décrit une grille régulière sur laquelle sont définis les paramètres continus du milieu effectif.

Dans le cas de l'homogénéisation adaptative, il faut calculer

$$\mathcal{F}^{\lambda_0}(g)(\mathbf{x}) = g * w_0(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} g\left(\frac{\tilde{\zeta}(\mathbf{x}')}{\varepsilon_0}\right) w_0\left(\frac{\tilde{\zeta}(\mathbf{x}) - \tilde{\zeta}(\mathbf{x}')}{\varepsilon_0}\right) \frac{|J_{\tilde{\zeta}}|}{\varepsilon_0} d\mathbf{x}',$$

où l'on voit que la transformation $\tilde{\zeta}$ vient effectivement déformer l'ondelette de filtrage w_0 . Cette déformation correspond à la variation de la fréquence de coupure selon la position définie en introduction pour une transformation $\tilde{\zeta}$ telle que $\tilde{\zeta}(\mathbf{x}) - \tilde{\zeta}(\mathbf{x}') \sim \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{x}')(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$, où α correspond au facteur de dilatation spatiale.

Plus précisément, l'utilisation d'une ondelette 2D w_0 à symétrie axisymétrique (relation 1.96, Figure 1.5) permet l'utilisation d'une ondelette 1D (aussi notée w_0) ne dépendant que de la distance (relation 1.97)

$$w_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = w_0(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|),$$

et où l'on utilise plus généralement

$$w_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = w_0(d(\mathbf{x}, \mathbf{x}')), \quad (3.12)$$

où $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ désigne une mesure de distance (par exemple la distance euclidienne) entre les points définis par \mathbf{x} et \mathbf{x}' . Pour que la transformation $\tilde{\zeta}$ corresponde effectivement à une adaptation de la fréquence de coupure du filtre avec la position il faut donc qu'elle contracte/dilate *localement* les distances au sens de la distance $d(\cdot, \cdot)$, c'est-à-dire

$$d(\tilde{\zeta}(\mathbf{x}), \tilde{\zeta}(\mathbf{x}')) \sim \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), \quad (3.13)$$

pour \mathbf{x} et \mathbf{x}' suffisamment proches et où la fonction $\alpha(\cdot, \cdot)$ fait directement référence au coefficient de dilatation α de la relation 3.3. En pratique, on utilise

$$\tilde{\zeta} = \frac{\lambda_{ref}}{\lambda_m(\mathbf{x})} \mathbf{x}, \quad (3.14)$$

où λ_{ref} est une référence éventuellement définie par l'utilisateur et $\lambda_m(\mathbf{x})$ correspond à un *profil* défini aux larges échelles, lui aussi potentiellement défini par l'utilisateur. Nous explicitons maintenant les restrictions permettant d'approximer α par $\frac{\lambda_{ref}}{\lambda_m}$ ce qui permet de retrouver effectivement le filtrage variable tel qu'introduit initialement.

L'adaptation de la fréquence de coupure se faisant selon un profil défini aux larges échelles, cela signifie que la fonction α ne varie qu'aux larges échelles. Pour correspondre strictement à une variation de la longueur d'onde de coupure du filtre, la fonction α doit assez peu varier sur le support spatial L_0 de l'ondelette de filtrage, de sorte à pouvoir la considérer comme constante sur ce support, $\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \simeq \alpha(\mathbf{x})$. Nous dénommons cette condition, condition *SL*. Dans un tel cas, la déformation de l'ondelette de filtrage conserve effectivement l'axisymétrie de l'ondelette car en un point donné \mathbf{x} la dilatation/contraction s'effectue de la même manière quelle que soit la direction d'approche de \mathbf{x} . La condition *SL* constitue une restriction majeure dans l'utilisation de la transformation $\tilde{\zeta}$, celle-ci permettant a priori une déformation quelconque et

potentiellement asymétrique de l'ondelette de filtrage. Si cette condition est vérifiée, le jacobien $|J_{\xi}|$ de ξ reste alors lui aussi constant sur le support de l'ondelette et peut alors être omis dans le calcul de l'intégrale 3.12. En effet, l'ondelette doit respecter la relation 1.98, se traduisant ici par $\int_{\mathbb{R}^2} w_0 \left(\frac{\xi(\mathbf{x}')}{\varepsilon_0} \right) \frac{|J_{\xi}|}{\varepsilon_0} d\mathbf{x}' = 1$, ce qui est assuré numériquement par le calcul du facteur $\int_{\mathbb{R}^2} w_0 \left(\frac{\xi(\mathbf{x}')}{\varepsilon_0} \right) \frac{|J_{\xi}|}{\varepsilon_0} d\mathbf{x}'$ venant alors normaliser 3.12. Cependant, en pratique α ne pourra pas toujours être considérée comme constante sur le support du filtre, ceci générant une erreur de calcul et motivant éventuellement une approximation plus fine de α et $|J_{\xi}|$.

L'objectif de ce chapitre est d'étudier numériquement quelques cas particuliers de construction de la fonction ξ permettant d'effectuer un filtrage variable sans accroître démesurément ni l'erreur de calcul sur le champ d'ondes ni le temps de calcul de la procédure d'homogénéisation (que la construction et l'utilisation de ξ pourrait imposer).

3.1.3 Variabilité 1D : méthode par profil

Une approximation couramment utilisée pour la description des milieux terrestres est une approximation 1D, le milieu ne variant que selon une direction (par exemple à l'échelle globale le modèle radial PREM (Dziewonski et Anderson 1981)). Dans un tel milieu les variations sont donc principalement fonction de la profondeur (composante x_2) et la première méthode de construction de ξ vise à ne prendre en compte que cette variation avec la profondeur. Grâce à la relation $\lambda_{min} = \frac{V_{min}}{f_c}$ où f_c est la fréquence de coin de la source et V_{min} est la vitesse minimale des ondes se propageant (par exemple les ondes S dans le cas élastique), la méthode d'homogénéisation avec filtrage adaptatif consiste alors à utiliser

$$\xi(\mathbf{x}) = \frac{V^{ref}}{V^{\sim}(\mathbf{x}_2)} \mathbf{x}, \quad (3.15)$$

où V^{\sim} est un profil vertical de vitesses défini seulement aux larges échelles et V^{ref} est une vitesse de référence. Sur une partie du domaine pour laquelle $V^{\sim} = V^{ref}$, le filtre utilisé est alors exactement celui de l'homogénéisation usuelle. La définition du profil vertical V^{\sim} et de la référence V^{ref} sont deux nouveaux paramètres entièrement définis par l'utilisateur. Nous utilisons généralement un profil vertical larges échelles issu (par exemple par filtrage) des vitesses les plus faibles présentes dans le milieu original et interpolé par splines.

En remarquant que, dans une zone du domaine Ω où $\frac{V^{ref}}{V^{\sim}} = 1$, l'homogénéisation adaptative correspond exactement à l'homogénéisation usuelle, on voit que le choix de la référence V^{ref} permet de localiser la définition naturelle du paramètre ε_0 aux régions de Ω pour lesquelles $\frac{V^{ref}}{V^{\sim}} = 1$. Un choix naturel de la référence V^{ref} consiste à prendre la vitesse minimale du profil vertical utilisé, de sorte que le paramètre ε_0 soit toujours identifié à $\frac{\lambda_0}{\lambda_{min}}$ avec λ_0 la fréquence de coupure fixe du filtre, et $\lambda_{min} = \frac{V_{min}}{f_c}$ la longueur d'onde minimale estimée par les plus petites vitesses de propagation des ondes sur l'ensemble du milieu de propagation. Un tel choix n'est cependant pas obligatoire.

Dans le cadre de la méthode à profil 1D, nous supposons que le profil utilisé varie suffisamment lentement par rapport aux dimensions du filtre (condition $\sigma - L_0 - 1D$). L'une des tâches dont il nous faut nous acquitter consiste donc à vérifier que cette hypothèse est correcte ou bien que l'erreur générée reste acceptable, notamment dans le cas de zones de transition relativement rapide. Le Jacobien de ξ étant alors supposé constant, il disparaît par la normalisation de l'ondelette (cf paragraphe précédent). Sa détermination pratique est inutile pour le calcul de 3.12 et l'on a pour tout point \mathbf{x} et tout point d'intégration \mathbf{x}' :

$$\xi(\mathbf{x}') = \frac{V^{ref}}{V^\sim(\mathbf{x}_2)} \mathbf{x}' \simeq \frac{V^{ref}}{V^\sim(\mathbf{x}_2)} \mathbf{x}', \quad (3.16)$$

$$d(\xi(\mathbf{x}), \xi(\mathbf{x}')) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \simeq \alpha(\mathbf{x}) d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{V^{ref}}{V^\sim(\mathbf{x}_2)} d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') , \quad (3.17)$$

et où la distance $d(.,.)$ est la distance Euclidienne 2D. En pratique, \mathbf{x} décrit une grille régulière sur laquelle le milieu effectif est échantillonné. Il suffit donc de pré-calculer une seule fois le rapport $\frac{V^{ref}}{V^\sim(\mathbf{x}_2)}$ pour toutes les ordonnées de cette grille ce qui nécessite au pire une seule passe d'interpolation et donc n'augmente théoriquement pas significativement le temps de calcul.

3.1.4 Variabilité 2D

Dans le cas où l'on souhaite prendre en compte la variabilité latérale du milieu, on utilise une transformation ξ similaire à celle définie par 3.15 mais avec une variation 2D,

$$\xi(\mathbf{x}) = \frac{V^{ref}}{V^\sim(\mathbf{x})} \mathbf{x}, \quad (3.18)$$

où V^\sim est un profil 2D correspondant à une version filtrée des plus petites vitesses de propagation d'ondes présentes dans le milieu (vitesses d'ondes S dans le cas élastique) et V^{ref} est à nouveau une référence pouvant être arbitrairement choisie (mais que nous choisirons usuellement en tant que minimum de V^\sim : $V^{ref} = \min_{\mathbf{x} \in \Omega} V^\sim(\mathbf{x})$). Le filtre appliqué à la carte des vitesses est ici un filtre Gaussien dont la déviation standard σ définit la largeur et devient le paramètre utilisateur définissant le profil 2D. Pour une quantité s on définit le filtré par filtre Gaussien $\mathcal{F}^{G_\sigma}(s)$ de s par la convolution

$$\mathcal{F}^{G_\sigma}(s) = s * G_\sigma, \quad (3.19)$$

avec G_σ défini par

$$G_\sigma = \frac{\pi\sigma^2}{2} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2\sigma^2}\right), \quad (3.20)$$

où $\|\mathbf{x}\|$ désigne la norme du vecteur position \mathbf{x} .

Dans le cas des ondes élastiques, on a donc

$$V^\sim(\mathbf{x}) = V_S * G_\sigma(\mathbf{x}). \quad (3.21)$$

Deux hypothèses d'approximation pour le calcul de la distance $d(\xi, \xi')$ dans 3.13 sont alors considérées :

- une approximation dite d'ordre 0 *a priori* bien adaptée lorsque $V^\sim(\mathbf{x})$ varie peu sur le support L_0 de l'ondelette de filtrage W_0 (condition SL),
- une approximation dite d'ordre 1 tentant de prendre en compte la variabilité de $V^\sim(\mathbf{x})$ sur le support L_0 du filtre par une approximation linéaire.

Ordre 0

Pour cette méthode, on considère que la condition SL est vérifiée lorsque $\sigma \gg L_0$. Cette approximation est alors similaire à celle utilisée dans la méthode à profil 1D ; notamment, il n'est pas nécessaire de calculer le Jacobien de ξ et l'on a, pour tout point \mathbf{x} de la grille d'échantillonnage du milieu homogénéisé et pour tout point d'intégration \mathbf{x}' ,

$$\xi(\mathbf{x}') = \frac{V^{ref}}{V^\sim(\mathbf{x}')} \mathbf{x}' \simeq \frac{V^{ref}}{V^\sim(\mathbf{x})} \mathbf{x}' \quad (3.22)$$

$$d(\xi(\mathbf{x}), \xi(\mathbf{x}')) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \simeq \alpha(\mathbf{x}) d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{V^{ref}}{V^\sim(\mathbf{x})} d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') , \quad (3.23)$$

où la distance $d(.,.)$ est à nouveau la distance Euclidienne 2D. Ainsi il suffit de pré-calculer $\frac{V^{ref}}{V^\sim(\mathbf{x})}$ sur tous les points de la grille (et non les points d'intégration) pour conserver un temps de calcul proche de celui de l'homogénéisation usuelle.

Ordre 1

Dans le cas de l'approximation dite d'ordre 1, on utilise un développement de Taylor à l'ordre 1 de $\frac{V^{ref}}{V^\sim}$, qui est suffisamment régulière par construction, au voisinage de chaque point \mathbf{x} de la grille

$$\frac{V^{ref}}{V^\sim}(\mathbf{x}') = \frac{V^{ref}}{V^\sim}(\mathbf{x}) + \nabla \left(\frac{V^{ref}}{V^\sim} \right) (\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) . \quad (3.24)$$

Ceci permet alors d'obtenir pour tout point de grille \mathbf{x} et tout point d'intégration \mathbf{x}'

$$\xi(\mathbf{x}') = \frac{V^{ref}}{V^\sim(\mathbf{x}')} \mathbf{x}' \simeq \left(\frac{V^{ref}}{V^\sim(\mathbf{x})} + \nabla \left(\frac{V^{ref}}{V^\sim} \right) (\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \right) \mathbf{x}' , \quad (3.25)$$

$$d(\xi(\mathbf{x}), \xi(\mathbf{x}')) = \frac{V^{ref}}{V^\sim(\mathbf{x})} d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \left(\nabla \left(\frac{V^{ref}}{V^\sim(\mathbf{x})} \right) (\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \right) d(\mathbf{x}', \mathbf{x}') , \quad (3.26)$$

$$J_\xi(\mathbf{x}') = \frac{V^{ref}}{V^\sim}(\mathbf{x}') \mathbf{I} + \mathbf{x}' \cdot \nabla \left(\frac{V^{ref}}{V^\sim} \right) (\mathbf{x}') \simeq \frac{V^{ref}}{V^\sim}(\mathbf{x}') \mathbf{I} + \mathbf{x}' \cdot \nabla \left(\frac{V^{ref}}{V^\sim} \right) (\mathbf{x}) \quad (3.27)$$

ce qui ne nécessite cette fois-ci que le calcul préalable de $\frac{V^{ref}}{V^\sim(\mathbf{x})}$ et de son gradient sur tous les points de grille (et non pour les points d'intégration).

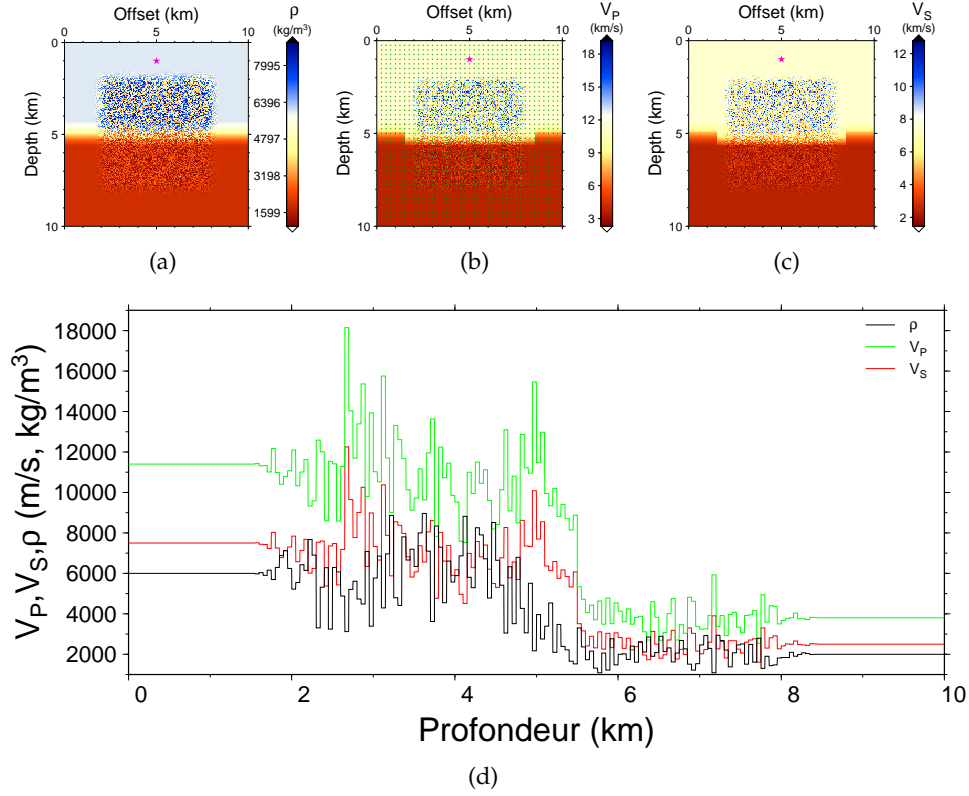


FIGURE 3.2 – Carte 2D de vitesses d'ondes S (Figure 3.2(c)), d'ondes P (Figure 3.2(b)) et de densité (Figure 3.2(a)) pour le milieu à 2 plateaux, et profil vertical en $x_1 = 5$ km (Figure 3.2(d)) de vitesses d'ondes S (rouge), d'ondes P (vert) et de densité (noir). L'étoile rose dénote le placement de la source explosive, les diamants verts (Figure 3.2(b)) dénotent la position des récepteurs (1 récepteur tous les 250 m dans chaque direction).

Cependant, le vecteur $\mathbf{x}' - \mathbf{x}$ doit être calculé en chaque point d'intégration et pour chaque point de grille afin d'effectuer le produit scalaire avec $\nabla \left(\frac{V^{ref}}{V(\mathbf{x})} \right)$ ce qui augmente le temps de calcul par rapport à la méthode d'ordre 0.

3.2 TESTS NUMÉRIQUES

Dans cette section nous testons la validité des méthodes adaptatives décrites précédemment sur deux modèles élastiques purement académiques. Tout d'abord on envisage le cas d'une variabilité seulement avec la profondeur, puis on étudie un cas de variabilité 2D en plateaux.

3.2.1 Modèle à variabilité 1D

Modèle et observables

Un cas très simple de variabilité large échelle 1D du milieu consiste à définir un milieu de comportement moyen aux larges échelles en plateaux. Nous envisageons ici un cas très simple à deux plateaux (Figure 3.2). Le milieu est défini sur un domaine Ω carré de 10 km de côté sur lequel on

définit un maillage de 200×200 éléments carrés ($50 \times 50 \text{ m}^2$). Sur chaque élément, le milieu est constant isotrope et défini par sa densité ρ et les deux paramètres de Lamé (Lamé 1852) λ et μ (on a $\mu = \rho V_S^2$ et $\lambda + 2\mu = \rho V_P^2$, où V_S est la vitesse des ondes S et V_P est la vitesse des ondes P). Aux larges échelles, le milieu est constitué de deux plateaux (numérotés 1 et 2) dont les valeurs moyennes sont :

– milieu 1, rapide, défini par

$$\rho_1 = 6000 \text{ kg.m}^{-3}, \quad (3.28)$$

$$V_{P_1} = 11400 \text{ m.s}^{-1}, \quad (3.29)$$

$$V_{S_1} = 7500 \text{ m.s}^{-1}, \quad (3.30)$$

$$\lambda_1 = 1.0476 \times 10^{11} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2}, \quad (3.31)$$

$$\mu_1 = 3.375 \times 10^{11} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2}, \quad (3.32)$$

$$(3.33)$$

– milieu 2, lent, défini par

$$\rho_2 = 2000 \text{ kg.m}^{-3}, \quad (3.34)$$

$$V_{P_2} = 3800 \text{ m.s}^{-1}, \quad (3.35)$$

$$V_{S_2} = 2500 \text{ m.s}^{-1}, \quad (3.36)$$

$$\lambda_2 = 3.88 \times 10^9 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2}, \quad (3.37)$$

$$\mu_2 = 1.25 \times 10^{10} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2}, \quad (3.38)$$

$$(3.39)$$

c'est-à-dire avec un facteur 3 sur la densité et les vitesses d'ondes P et S. La transition entre ces milieux est assurée continûment par un cosinus de période 6km (permettant la transition sur seulement 1500m , comme le montre la courbe noire en Figure 3.3). Sur la région centrale hétérogène, les paramètres élastiques (densité et paramètres de Lamé) pour chaque élément sont tirés aléatoirement autour de leur valeur moyenne avec un contraste de $\nu = \pm 50\%$.

Sur l'ensemble du domaine, la vitesse minimale est alors de $\min_{\Omega} (V_S) = 1500 \text{ m/s}$. En utilisant une fréquence de coin pour la source de $f_c = 5 \text{ Hz}$, ceci correspond à une longueur d'onde minimale $\lambda_{\min} = 300 \text{ m}$. Comparativement à la taille des hétérogénéités (50 m) on est bien dans un cas d'application de l'homogénéisation. En pratique on utilise des longueurs d'ondes de coupure λ_0 pour l'homogénéisation entre 30 m et 350 m , soit un ε_0 compris entre 0.1 et 1.2 (et L_0 entre 80 m et 800 m).

De plus, grâce au facteur 3 sur les vitesses, la longueur d'onde minimale dans le plateau rapide est 3 fois plus grande. Ainsi, pour l'homogénéisation usuelle pour laquelle ε_0 est défini à partir de la longueur d'onde minimale sur tout le domaine, ε_0 est localement 3 fois plus faible dans le plateau rapide. En termes de convergence, ceci implique une précision entre 3 (convergence en ε_0) et 9 (convergence en ε_0) fois plus importante dans la zone rapide que dans la zone lente. C'est la raison pour laquelle nous avons choisi de placer la source dans le plateau rapide afin de minimiser l'erreur transportée depuis la source. Ayant gardé la source

près de la surface, le plateau rapide est situé en surface alors que la partie lente est située en profondeur ce qui est contraire aux milieux plus réalistes mais n'invalide pas pour autant la méthode.

On remarque que la transition sur 1500 m est large par rapport au support ($L_0 < 800$ m) du filtre par ondelette w_0 de la procédure d'homogénéisation. Cette transition est donc *a priori* une transition larges échelles respectant la condition SL.

Homogénéisation adaptative à profil 1D

L'adaptation avec la profondeur (composante \mathbf{x}_2) nécessite seulement la construction du profil d'adaptation $\alpha(\mathbf{x}_2) = \frac{V_{ref}}{V^{\sim}(\mathbf{x}_2)}$. La construction d'un tel profil vertical est laissée à l'appréciation de l'utilisateur. Pour l'étude de l'homogénéisation adaptative à variabilité 1D, nous définissons deux profils particuliers $V_1^{\sim}(\mathbf{x}_2)$ et $V_2^{\sim}(\mathbf{x}_2)$ en suivant les étapes suivantes :

1. on définit un échantillonnage vertical à 200 points $(\mathbf{x}_2^i)_{i \in [1;200]}$ entre $\mathbf{x}_2^1 = 25$ m et $\mathbf{x}_2^{200} = 9975$ m (un point tous les 50 m),
2. pour chaque altitude \mathbf{x}_2^i , on calcule la moyenne $\langle V_S^i \rangle$ (cas 1 : profil moyen) et le minimum $\min_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2^i} (V_S)$ (cas 2 : profil minimal) de V_S sur tous les éléments traversés par la ligne horizontale (imaginaire) d'équation $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2^i$,
3. pour éliminer définitivement les variations rapides, V_1^{\sim} et V_2^{\sim} (Figure 3.3) sont obtenus en filtrant respectivement $\langle V_S \rangle$ et $\min_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2^i} (V_S)$ avec un filtre Gaussien (relation 3.19) de déviation standard $\sigma = 500$ m.
4. on construit finalement : $\alpha(\mathbf{x}_2) = \frac{\min_{\mathbf{x}_2} V^{\sim}}{V^{\sim}(\mathbf{x}_2)}$ pour chacun des deux cas précédents.

Le profil V_1^{\sim} obtenu (courbe bleue en Figure 3.3) est ainsi assez proche du profil larges échelles lisse théorique (avant introduction des variations aléatoires) décrit au paragraphe précédent (courbe cyan en Figure 3.3). Le profil V_2^{\sim} (courbe verte en Figure 3.3) utilisant un profil des vitesses minimales se veut plus conservatif en terme d'adaptation du filtrage variable : en respectant d'avantage l'évolution des vitesses minimales et non l'évolution d'une moyenne des plus faibles vitesses, l'adaptation large échelle de la longueur d'onde de coupure est censée être mieux estimée et donc impliquer moins de variations locales sur le paramètre ε_0 .

Idéalement, pour un ε_0 fixé, l'homogénéisation adaptative se comporte comme l'homogénéisation usuelle dans le plateau lent, à laquelle nous nous référerons par la suite sous la dénomination *d'homogénéisation usuelle à référence lente* ou HURL, et comme l'homogénéisation usuelle utilisant $3\varepsilon_0$ dans le plateau rapide (le facteur 3 étant issu du facteur 3 sur les vitesses), que nous nommerons par la suite *homogénéisation usuelle à référence rapide* ou HURR. Ainsi, si l'on appelle *milieu effectif lent* le milieu effectif calculé par HURL, *milieu effectif rapide* le milieu effectif calculé par HURR, et *milieu effectif adaptatif* le milieu effectif calculé par l'homogénéisation adaptative, alors le milieu effectif adaptatif doit correspondre exactement au milieu effectif lent sur le plateau lent et au milieu effectif

Profils verticaux larges échelles

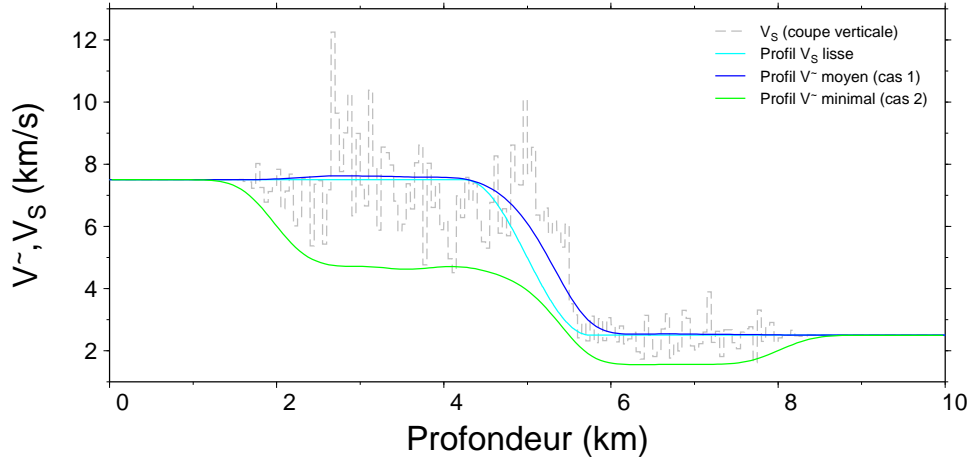


FIGURE 3.3 – Profils verticaux pour l’homogénéisation adaptative avec la profondeur ; coupe verticale de V_S pour $x_1 = 5$ km (courbe grise), coupe verticale de V_S pour le milieu larges échelles avant ajout du bruit blanc (courbe noire), profil V^\sim pour la première étude (courbe rouge) et pour la seconde étude (courbe verte).

rapide sur le plateau rapide. Dans la zone de transition en revanche, aucune correspondance avec l’un ou l’autre des milieux effectifs de référence n’est attendue. Pour $\varepsilon_0 = 0.4$, on obtient effectivement une bonne correspondance des milieux effectifs pour des coupes verticales en $x_1 = 5$ km (Figure 3.4).

Pour valider la méthode on s’intéresse à l’erreur entre le champ d’ondes obtenu par l’homogénéisation d’ordre 0 (dénoté par $\mathbf{v}^{*,\varepsilon_0} = \dot{\mathbf{u}}^{*,\varepsilon_0}$ pour les vitesses) et le champ d’ondes réel (\mathbf{v}^{ref}) obtenu par un tir dans le milieu original. Dans le cas de l’homogénéisation usuelle, cette erreur est au minimum en $O(\varepsilon_0)$ (éventuellement en $O(\varepsilon_0)^2$). En pratique, une partie de cette erreur est localisée et s’exprime en fait en $O(\tilde{\varepsilon}_0)$ où $\tilde{\varepsilon}_0 = \frac{\lambda_0}{\lambda_m(\mathbf{x})}$. Dans le cas de l’homogénéisation usuelle, cette erreur locale est donc beaucoup plus faible (3 à 9 fois plus faible) dans le plateau rapide que dans le plateau lent. En revanche, dans le cas de l’homogénéisation adaptative $\tilde{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0$, cette erreur locale est constante. Idéalement nous voudrions observer ce phénomène sur l’erreur $\mathcal{L}^2([0; t_{max}])$ en temps E_c telle que définie au chapitre 1. Malheureusement, l’erreur n’est pas uniquement localisée ; dans un milieu fortement hétérogène l’erreur se propage avec l’onde. Ainsi nous cherchons essentiellement à nous assurer que l’erreur obtenue par la méthode adaptative est bornée, minorée par l’erreur obtenue par la méthode HURL et majorée par la méthode HURR. De plus, afin de minimiser l’erreur propagée, nous avons placé la source dans la zone générant la plus faible erreur locale, c’est-à-dire la zone rapide. Enfin, bien qu’elle ne soit pas garantie, nous espérons observer une convergence pour chaque phase du signal (convergence forte). Pour observer ceci, nous n’utilisons pas ici l’erreur en moyenne temporelle $E(\mathbf{v}) = E(\dot{\mathbf{u}})$ définie par les relations 1.167 et 1.168, qui ne serait indicatrice que d’une convergence moyenne

ou faible, mais une erreur instantanée de type $\mathcal{L}^\infty([0, t_{max}])$ définie par

$$E_i^\infty(\mathbf{v}) = \frac{\max_{t \in [0, t_{max}], n \in [1, n_d]} \left(|\mathbf{v}_n^{*, \varepsilon_0} - \mathbf{v}_n^{ref}|(\mathbf{x}^i, t) \right)}{\sqrt{\int_0^{t_{max}} \|\mathbf{v}^{ref}\|^2(\mathbf{x}^i, t) dt}}, \quad (3.40)$$

où n_d est la dimension d'espace (ici $n_d = 2$) et \mathbf{x}^i est le vecteur position du récepteur i . La normalisation s'effectuant sur la norme du vecteur vitesse de référence, qui ne contient pas d'erreur issue de l'homogénéisation, son intégration en temps importe peu. La variabilité de l'erreur étant verticale (composante \mathbf{x}_2), on s'intéresse plus particulièrement au profil vertical de l'erreur maximale, c'est-à-dire que pour chaque altitude \mathbf{x}_2^j indexée par l'entier j , on détermine l'erreur maximale pour tous les récepteurs à cette altitude

$$E^\infty(\mathbf{v})(\mathbf{x}_2^j) = \max_{i \in [1; N_r], \mathbf{x}_2^i = \mathbf{x}_2^j} E_i^\infty(\mathbf{v}). \quad (3.41)$$

Enfin, on considère l'erreur maximale $E^{\infty, \infty}(\mathbf{v})$ sur tout le domaine pour l'étude de la convergence en fonction de ε_0 ,

$$E^{\infty, \infty}(\mathbf{v}) = \max_{i \in [1; N_r]} E_i^\infty(\mathbf{v}). \quad (3.42)$$

On montre en Figure 3.5 et Figure 3.6 que l'erreur générée par la méthode d'homogénéisation adaptative est toujours bien contrôlée par les méthodes HURL (borne inférieure) et HURR (borne supérieure). De plus pour ε_0 suffisamment petit (Figure 3.5(c)), et hormis pour la zone de transition, le profil d'erreur issu de l'homogénéisation adaptative correspond bien à celui issu de HURL sur le plateau lent, et à celui issu de HURR sur le plateau rapide, ce qui montre que la procédure mise en place effectue correctement l'adaptation du filtre. On observe aussi (Figure 3.5(c)) que l'erreur locale, qui est toujours plus faible sur le plateau rapide que sur le plateau lent pour les homogénéisations usuelles, reste en revanche à peu près constante (en moyenne) dans le cas de l'homogénéisation adaptative ce qui était le comportement attendu. On peut noter par ailleurs que l'utilisation du profil minimal (courbe verte), qui se voulait plus conservatif que les profils lisse ou moyen, apporte globalement une assez faible amélioration de la précision. De manière très ponctuelle, étant donné que dans un milieu réaliste un profil lisse théorique n'est pas accessible, on peut noter que l'utilisation du profil moyen approxime assez bien le profil lisse théorique (courbes bleu et cyan) même dans la zone de transition.

La courbe de convergence avec ε_0 (Figure 3.6) montre enfin que l'homogénéisation adaptative avec la profondeur n'affecte pas sensiblement les régimes de convergence. En revanche, pour obtenir une erreur maximale similaire au cas de l'homogénéisation usuelle (HURL), il faut globalement diminuer la valeur du ε_0 choisi.

Homogénéisation adaptative à profil 2D

Bien que la variation aux larges échelles ne soit que 1D (variation verticale), ce cas test est révélateur de la validité et des limitations de la méthode adaptative à variabilité 2D. Nous reprenons ici les calculs et profils d'erreurs développés dans le paragraphe précédent et nous nous attachons plus particulièrement à deux études :

1. pour un ε_0 permettant une bonne convergence (en pratique on choisit $\varepsilon_0 = 0.2$, on étudie l'influence de la déviation standard σ qui est le paramètre utilisateur critique permettant la construction du profil 2D larges échelles $V^\sim(\mathbf{x})$ par filtrage Gaussien 2D des vitesses d'ondes S,
2. pour une valeur acceptable de σ , on étudie la convergence en ε_0 .

Étude de l'impact du paramètre σ à ε_0 fixé

Afin d'étudier l'impact du paramètre σ , il convient de se placer dans un cas où l'erreur d'homogénéisation est assez petite (ε_0 suffisamment petit); nous avons choisi ici $\varepsilon_0 = 0.2$ correspondant à $\lambda_0 = 62.5 \text{ m}$ et donc $L_0 \simeq 220 \text{ m}$. On fait ensuite varier le paramètre σ de 2500 m à 250 m . Les profils larges échelles V^\sim sont alors des profils 2D illustrés en Figure 3.7 se rapprochant du profil lisse du paragraphe précédent lorsque σ diminue.

Dans le cas de la méthode d'ordre 0, les profils verticaux d'erreurs $E^\infty(\mathbf{v})(\mathbf{x}_2)$ (Figure 3.8(a)) restent globalement compris entre les bornes désirées définies par HURL (borne inférieure, courbe noire) et HURR (borne supérieure, courbe rouge), ce qui tend à nouveau à valider la méthode. De plus on observe une différence de comportement entre le plateau rapide (partie peu profonde) et le plateau lent (partie profonde). Sur le plateau rapide, l'erreur ne semble pas dépendre de σ et correspond très bien à la référence souhaitée (HURR) alors que sur le plateau lent, l'erreur diminue avec σ jusqu'à un mode convergé, ne correspondant pas pour autant à la référence souhaitée (HURL). La disparité de cette diminution de l'erreur entre plateau lent et plateau rapide s'explique par la conjonction de deux faits.

- Premièrement, pour de grandes valeurs de σ la forme des profils V^\sim offre une transition très étendue par rapport à la longueur de transition réelle, et ces profils correspondent de plus en plus à la transition réelle lorsque σ diminue.
- Deuxièmement, la vitesse de référence étant choisie à $V_{ref} = V_{min}^\sim$, l'adaptation de fréquence ne s'effectue que pour les vitesses V^\sim plus importantes que V_{ref} . Ceci signifie que sous-estimer V^\sim correspond à une adaptation sub-optimale du filtre qui n'introduit pas d'erreur. En revanche, sur-estimer V^\sim effectue une adaptation trop importante du filtre, ce qui risque d'engendrer une erreur d'homogénéisation inattendue.

Dans notre cas d'étude, et afin d'être conservative, l'adaptation du filtre ne doit pas du tout opérer sur le plateau lent mais uniquement opérer dans la zone de transition et sur le plateau rapide. Pour de trop grandes valeurs de σ , la zone de transition s'étale sur les plateaux lents et rapides avec l'effet de sous-estimer les vitesses dans le plateau rapide (sans effet dégradant) et de sur-estimer ces vitesses dans le plateau lent ce qui génère de l'erreur.

Le fait que la méthode adaptative d'ordre 0 ne permette pas d'obtenir le profil d'erreur vertical de référence (HURL, courbe noire en Figure 3.8(a)) sur le plateau lent, même pour des valeurs réduites de σ ($\sigma \leq 500 \text{ m}$), indique cependant qu'il reste une erreur systématique résiduelle. Celle-ci peut s'expliquer par le fait que, pour $\sigma \leq 500 \text{ m}$, la condition

$L_0 \simeq 220 \text{ m} \ll \sigma$ (condition SL) n'est plus respectée ce qui introduit une nouvelle erreur à l'ordre 0, erreur potentiellement réduite par la méthode d'ordre 1.

Dans le cas de la méthode d'ordre 1 (Figure 3.8(b)), on observe à nouveau un bon comportement global de la méthode, c'est-à-dire que les profils d'erreurs restent globalement compris entre les bornes inférieures HURL et supérieures HURR attendues. Le même processus de convergence lorsque σ diminue est observé, à nouveau essentiellement dans le plateau lent, à une exception près, pour $\sigma = 250 \text{ m}$. On note cependant que l'erreur introduite par la méthode d'ordre 1 est plus faible que celle introduite par la méthode d'ordre 0, et que le profil d'erreur sur le plateau lent rejoint cette fois-ci le profil de référence attendu (profil HURRL, en noir). Ainsi la méthode d'ordre 1 semble corriger l'erreur systématique observée précédemment pour la méthode d'ordre 0. Ceci signifie en particulier que la méthode d'ordre 1 présente effectivement une amélioration en terme de sensibilité au critère $L_0 \ll \sigma$ (condition SL). Cependant pour σ trop petit par rapport au support L_0 du filtre d'homogénéisation, l'erreur redevient importante, voire plus importante que la courbe de référence attendue (courbes magenta et rouge dans le plateau rapide peu profond de la Figure 3.8(b)).

Enfin, si elle semble plus précise, le calcul par la méthode d'ordre 1 a généré dans ce cas-ci une augmentation moyenne du temps de calcul d'un peu plus de 18% par rapport à la méthode d'ordre 0 (3404 s pour l'ordre 0 contre 4036 s pour l'ordre 1). Pour référence, les méthodes d'homogénéisation usuelles à référence lente et rapide ont nécessité ici 1227 s et 2100 s respectivement, ce qui implique que la méthode d'homogénéisation adaptative à profil 2D est $\simeq 2.8$ fois plus lente pour l'ordre 0, et 3.3 fois plus lente pour l'ordre 1, que la méthode usuelle à référence lente (HURL).

Étude de la convergence en ε_0 à σ fixé

On s'attache maintenant à faire varier ε_0 dans l'intervalle $[0.1; 1]$. On a donc $\lambda_0 \in [30; 300]$. Comme nous l'avons vu précédemment, il est nécessaire d'obtenir un profil d'adaptation 2D aux larges échelles V^\sim à variations suffisamment lentes par comparaison avec la taille L_0 du filtre par ondelette w_0 . Idéalement on a $\sigma \gg L_0 \simeq 3,5\lambda_0$, donc dans notre cas il faudrait $\sigma \gg 1000 \text{ m}$. En pratique, l'étude précédente a montré (principalement pour la méthode d'ordre 0) qu'il y avait un compromis à trouver entre la mésestimation de l'intégrale de filtrage utilisée par l'homogénéisation à cause d'un σ trop petit et la mésestimation de l'adaptation du filtre (adaptation non conservative) à cause d'un profil d'adaptation mal dimensionné (σ trop grand). Il est donc à la fois nécessaire de conserver $\sigma \gg 1000 \text{ m}$ mais d'obtenir un profil se rapprochant le plus possible du profil lisse idéal, qui était quasiment obtenu pour $\sigma = 500 \text{ m}$ dans l'étude précédente. La première condition paraissant plus importante à respecter, au regard de la précision obtenue, nous étudions ici le compromis $\sigma = 1500 \text{ m}$.

Globalement, pour un paramètre d'homogénéisation ε_0 suffisamment petit $\varepsilon_0 < 0.5$ (Figures 3.9(b) et 3.9(c)), le comportement des méthodes adaptatives d'ordre 0 et 1 déterminée au paragraphe précédent sont repro-

duits, la méthode d'ordre 1 permettant toujours une meilleure approximation. On note à nouveau une rapide convergence vers la référence rapide (HURR) sur le plateau rapide et beaucoup plus lentement vers la référence lente (HURL) sur le plateau lent du fait du comportement non conservatif de l'adaptation de la fréquence de coupure du filtre, à cause de la mauvaise approximation du profil d'adaptation (σ trop grand). On remarque que l'erreur est multipliée par 2 lorsque ε_0 est multiplié par 2 en comparant les graphiques en Figure 3.9 ce qui correspond à une convergence de l'homogénéisation en $O(\varepsilon_0)$. Finalement, la courbe de l'erreur maximale $E^{\infty, \infty}(\mathbf{v})$ en fonction de ε_0 en Figure 3.10 montre effectivement un régime de convergence plutôt en $O(\varepsilon_0)$ qu'en $O(\varepsilon_0^2)$, avec une meilleure précision pour la méthode d'ordre 1.

3.2.2 Modèle à variabilité 2D

L'exemple précédent a permis de montrer la validité et les limitations des méthodes à profil 1D et 2D. On présente ici un cas de variabilité 2D du milieu traité exclusivement par la méthode à profil 2D.

Modèle

On reprend l'idée d'un modèle en plateaux (Figure 3.11). Le domaine est carré de 12 km de côté, avec 300×300 éléments carrés de 40 m de côté. Dans chaque élément les propriétés élastiques sont constantes. Les valeurs moyennes dans les plateaux sont, comme précédemment, définie par :

- milieu 1, rapide, défini par

$$\rho_1 = 6000 \text{ kg.m}^{-3}, \quad (3.43)$$

$$V_{P_1} = 11400 \text{ m.s}^{-1}, \quad (3.44)$$

$$V_{S_1} = 7500 \text{ m.s}^{-1}, \quad (3.45)$$

- milieu 2, lent, défini par

$$\rho_2 = 2000 \text{ kg.m}^{-3}, \quad (3.46)$$

$$V_{P_2} = 3800 \text{ m.s}^{-1}, \quad (3.47)$$

$$V_{S_2} = 2500 \text{ m.s}^{-1}. \quad (3.48)$$

La couronne extérieure, sur laquelle les propriétés élastiques restent constantes, fait 1.6 km d'épaisseur. Dans la zone centrale hétérogène on a une variabilité de 60% sur la densité et les paramètres de Lamé λ et μ par rapport à leur valeur moyenne ; on a alors $V_{s_{min}} = 1265 \text{ m/s}$. Pour une fréquence centrale de $f_0 = 2 \text{ Hz}$ pour la source on obtient une fréquence de coin d'environ $f_c \sim 5 \text{ Hz}$, d'où $slm \sim 250 \text{ m}$. La transition entre les plateaux est à nouveau modulée par un cosinus et s'étend sur 1 km dans chaque direction d'espace.

Profils 2D étudiés

La largeur σ du filtre gaussien définit la grossièreté du profil 2D. Dans l'exemple précédent, nous avons vu qu'un σ trop large par rapport à la

longueur de transition réelle (ici 1 km) comportait le risque d'adapter le filtrage de façon erronée, notamment dans des zones lentes mal estimées par le profil 2D. Afin de construire les profils 2D large échelle on essaie ici trois valeurs de paramétrisation du filtre gaussien $\sigma = 0.5, 1$ et 1.5 km (Figure 3.12).

Milieu effectif obtenu pour $\varepsilon_0 = 0.4$

On montre en Figure 3.13 une coupe horizontale en $x_2 = 9$ km des différents paramètres effectifs obtenus pour $\varepsilon_0 = 0.4$, soit $\lambda_0 = 100$ m, et $\sigma = 0.5$ km pour les méthodes d'ordre 0 et 1. Comme pour l'exemple précédent, on compare les résultats avec les deux bornes de références HURL, correspondant à $\varepsilon_0 = 0.4$, et HURR, correspondant à $\varepsilon_0 = 1.4$. On voit que la différence entre les méthodes d'ordre 0 et 1 n'intervient que dans une zone de transition d'environ 3 km.

Courbes d'erreurs

Comme précédemment on utilise l'erreur maximale $E^{\infty, \infty}(\mathbf{v})$ définie pour l'ensemble du domaine pour comparer les résultats obtenus par les méthodes d'homogénéisation adaptative d'ordre 0 et 1 aux deux cas limites HURL et HURR. On montre en Figure 3.14 les courbes d'erreur en fonction de ε_0 pour les méthodes d'ordre 0 et d'ordre 1, pour les trois valeurs d'étude de σ . Les courbes obtenues pour l'homogénéisation adaptative restent bien contraintes entre les deux cas limites, ce qui tend à valider globalement la méthode.

Cependant, l'erreur commise par l'hmg adaptative est toujours strictement supérieure à la borne inférieure espérée (HURL, courbes noires). Il est donc nécessaire d'utiliser un plus petit ε_0 avec l'homogénéisation adaptative qu'avec l'homogénéisation usuelle pour obtenir une précision similaire. On observe que l'homogénéisation adaptative d'ordre 1 offre systématiquement une erreur plus petite que la méthode d'ordre 0, notamment pour les plus grandes valeurs de ε_0 . Ceci s'explique par le fait que la condition $L_0 \ll \sigma$ (condition SL), conditionnant la validité de la méthode d'ordre 0, n'est pas bien respectée pour les grands ε_0 . En effet, pour ε_0 variant dans $[0.2; 1;]$, λ_0 varie dans $[50 \text{ m}; 250 \text{ m}]$ et la largeur du filtre évolue alors dans $[170 \text{ m}; 840 \text{ m}]$. Pour les grands ε_0 , on a L_0 autour de 500 m ce qui brise la condition SL pour la gamme de valeurs de σ étudiée. L'approximation d'ordre 1 vient alors corriger, au moins partiellement, ce problème. On note cependant que, contrairement à la précédente expérience, l'effet de la valeur de σ sur la précision obtenue est peu significatif, surtout compte tenu de la perte de précision systématique engendrée par la méthode adaptative.

Enfin, du point de vue du temps de calcul, et pour des ressources matérielles identiques, l'homogénéisation adaptative d'ordre 0 a augmenté d'un facteur 2 (en moyenne, tous ε_0 confondus) le temps de calcul du milieu homogénéisé par rapport à l'homogénéisation usuelle à référence lente. L'homogénéisation adaptative d'ordre 1, quant à elle, a augmenté d'un rapport 2.5 ce temps de calcul. Pour $\varepsilon_0 = 0.5$, le temps de calcul de l'homogénéisation usuelle représente environ 17% du temps de calcul de la forme d'ondes dans le milieu original.

Considérant l'augmentation de l'erreur que l'on obtient et l'incertitude sur la définition correcte du paramètre σ (notamment pour des modèles plus complexes), cette augmentation du coût calcul peut finalement sembler excessive.

CONCLUSION

Pour le calcul de formes d'ondes dans un milieu déterminé, la méthode des éléments spectraux constitue un outil puissant. Cependant, les contraintes qu'elle requiert sur le maillage peuvent la rendre difficile à utiliser dans des milieux fortement hétérogènes. La méthode d'homogénéisation, en calculant un milieu effectif continu, permet alors de d'affranchir de la majeure partie de cette difficulté.

L'homogénéisation usuelle apporte toutefois une restriction sur la taille des éléments du maillage effectif qu'il est possible d'utiliser. Plus le maillage initial pouvait être localement large et plus le maillage effectif doit être localement raffiné. Afin de réduire cette restriction à son minimum, nous avons étudié une variante de la méthode d'homogénéisation, l'homogénéisation adaptative, se basant sur la notion de filtrage variable en fonction de la position dans le domaine Ω . Ce filtrage variable a été introduit dans le procédé d'homogénéisation au travers d'une transformation géométrique, dite « à profil », et définie aux larges échelles. Deux cas ont alors été envisagés :

1. celui d'un filtrage variable avec la position uniquement en fonction de la profondeur (profil 1D), et
2. celui d'un filtrage variable avec la position totalement à 2D (profil 2D) selon deux variantes, l'une d'ordre 0 et l'autre d'ordre 1.

Nous avons montré que, sur le principe, ces méthodes fonctionnent et ne modifient pas le mode de convergence théorique de la procédure d'homogénéisation. Cependant, plusieurs difficultés viennent diminuer l'intérêt de ces variantes :

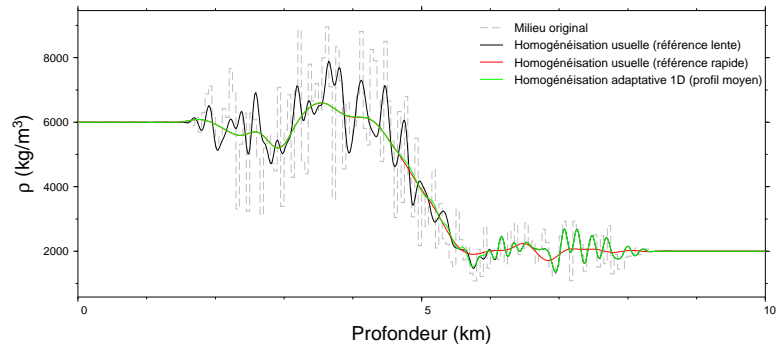
D'une part, la construction des profils larges échelles n'est pas évidente car elle est soumise à deux conditions contradictoires. Ils doivent être définis à des échelles suffisamment larges, c'est la condition SL , tout en évitant une surestimation trop grossière du profil large échelle minimal. Des profils inappropriés peuvent alors conduire à une erreur systématique significative sur les champs d'ondes obtenus.

D'autre part, il s'avère nécessaire de devoir diminuer le paramètre de contrôle ε_0 avec les méthodes adaptatives (environ d'un facteur 2 pour les méthodes d'ordre 0, c'est-à-dire celles à profils 1D et 2D d'ordre 0) afin d'obtenir une erreur comparable à celle obtenue avec la méthode d'homogénéisation usuelle.

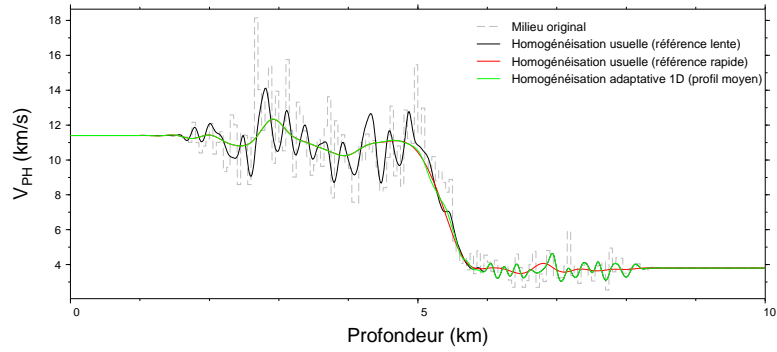
Enfin, le temps de calcul est significativement plus important ($\sim \times 1.5$) pour les variantes adaptatives que pour la procédure d'homogénéisation usuelle.

Ces limitations pratiques conduisent à s'interroger non pas sur le concept de l'homogénéisation adaptative en général, mais plutôt sur la qualité et le bien fondé des implémentations que nous avons envisagées ici. En

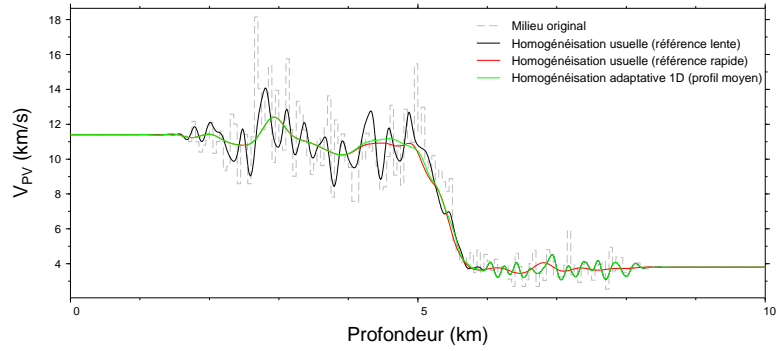
effet, nos implémentations d'un filtrage adaptatif dans la méthode d'homogénéisation se basent sur un filtrage des quantités d'intérêt au sens de l'analyse de Fourier. Cependant, cette analyse ne semble pas parfaitement bien adaptée pour la propagation des ondes. Conceptuellement, on peut lui préférer la méthode évoquée dans Capdeville et al. (2013, , Annexe B), qui semble plus naturelle au sens des ondes. L'idée est, pour un milieu hétérogène donné, de calculer les modes propres dans une version lissée du modèle original reproduisant approximativement la variation large échelle de la longueur d'onde dominante. Ces modes propres contiennent alors de façon localisée l'information fréquentielle locale, chaque mode propre correspondant à une fréquence propre. Pour une longueur d'onde de coupure λ_0 donnée, il est alors possible de définir, pour chaque position, quels modes propres conserver pour effectuer un filtrage adaptatif. Une telle méthode constitue donc une piste naturelle pour implémenter plus efficacement l'idée d'une homogénéisation avec filtrage adaptatif.



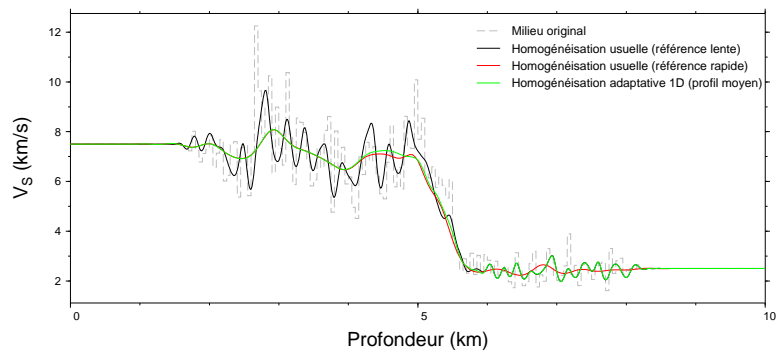
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURE 3.4 – Coupes verticales du milieu en $x_1 = 5$ km ; 3.4(a) : densité ; 3.4(b) : Vitesses d'ondes P à polarisation PH ; 3.4(c) : Vitesses d'ondes P à polarisation PV ; 3.4(d) : Vitesses d'ondes S. Milieu original (gris), milieu obtenu par HURL (noir), milieu obtenu par HURR (rouge), milieu obtenu par l'homogénéisation adaptative (vert).

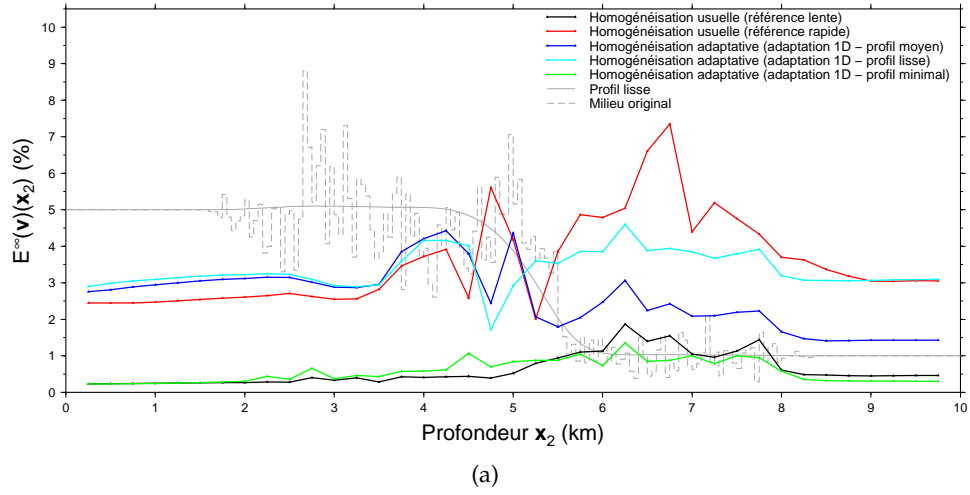
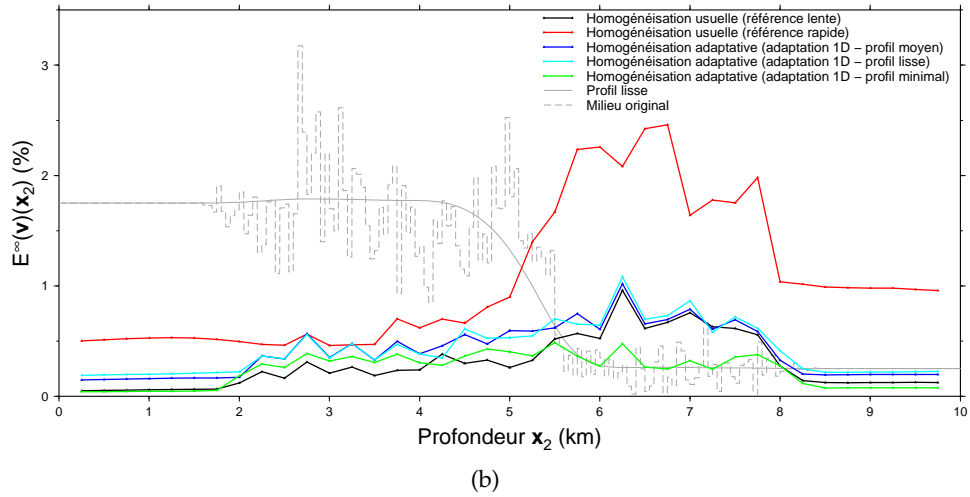
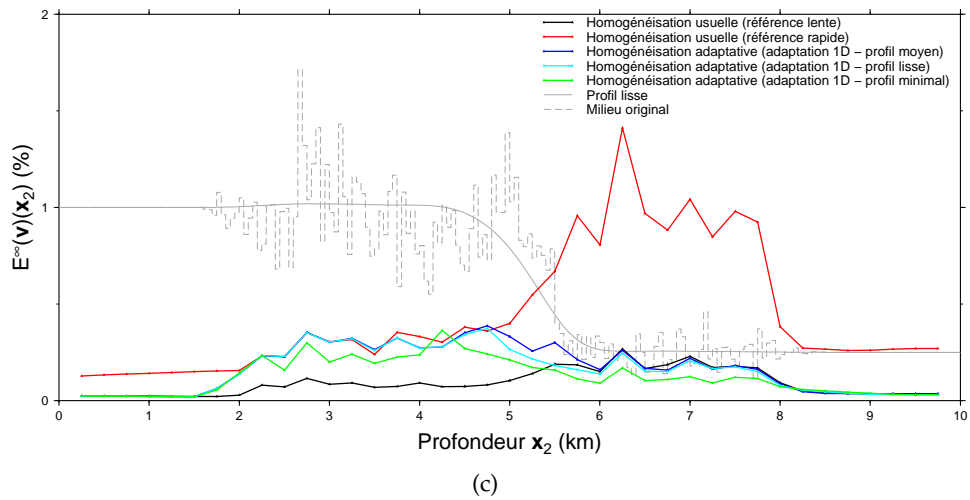
Profils verticaux d'erreur pour $\varepsilon_0=0.8$ Profils verticaux d'erreur pour $\varepsilon_0=0.4$ Profils verticaux d'erreur pour $\varepsilon_0=0.2$ 

FIGURE 3.5 – Profils verticaux d'erreurs $E^\infty(\mathbf{v})(\mathbf{x}_2)$ pour les deux homogénéisations de référence (HURL en noir et HURR en rouge) et pour les différents profils 1D employés dans la procédure d'homogénéisation adaptative pour différentes valeurs de ε_0 . Les coupes verticales du profil de vitesse d'ondes S lisse (traits pleins gris) et du milieu aléatoire en $\mathbf{x}_1 = 5$ km (tirets gris) sont tracés pour repère.

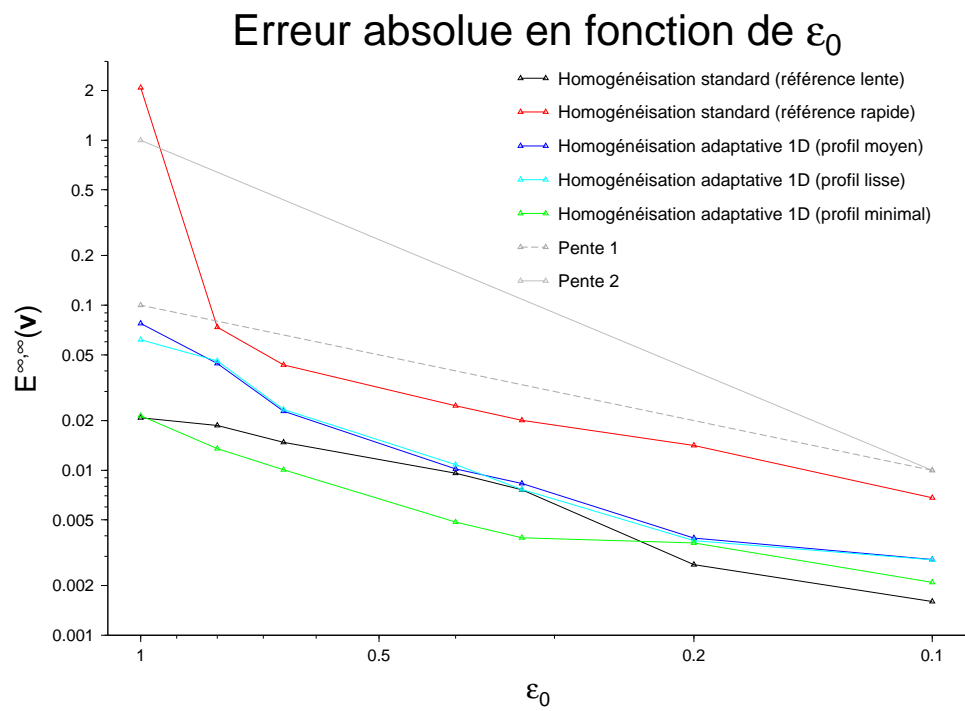
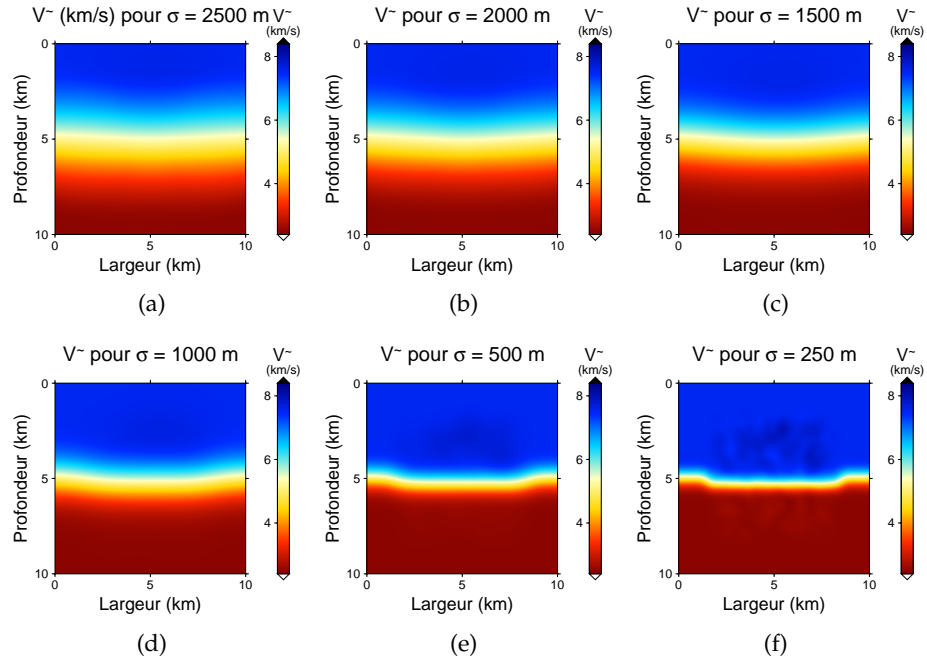


FIGURE 3.6 – Courbe d'erreur $E_{\infty, \infty}(\mathbf{v})$ en fonction de ε_0 pour les deux homogénéisations de référence (HURL en noir et HURR en rouge) et pour les différents profils 1D employés dans la procédure d'homogénéisation adaptative. Les pentes (courbes grises) permettent de visualiser les régimes de convergence en ε_0^2 et en ε_0 (le minimum théorique).



Profils verticaux moyens larges échelles

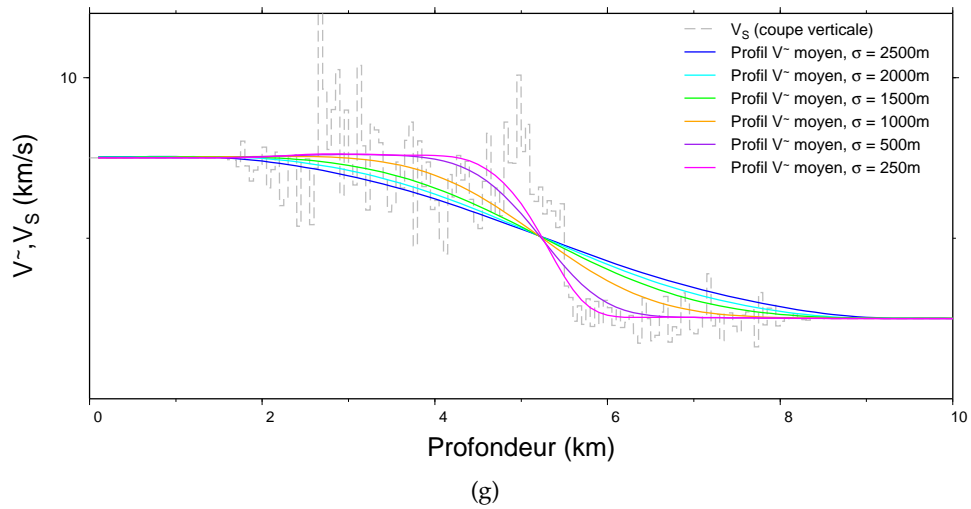
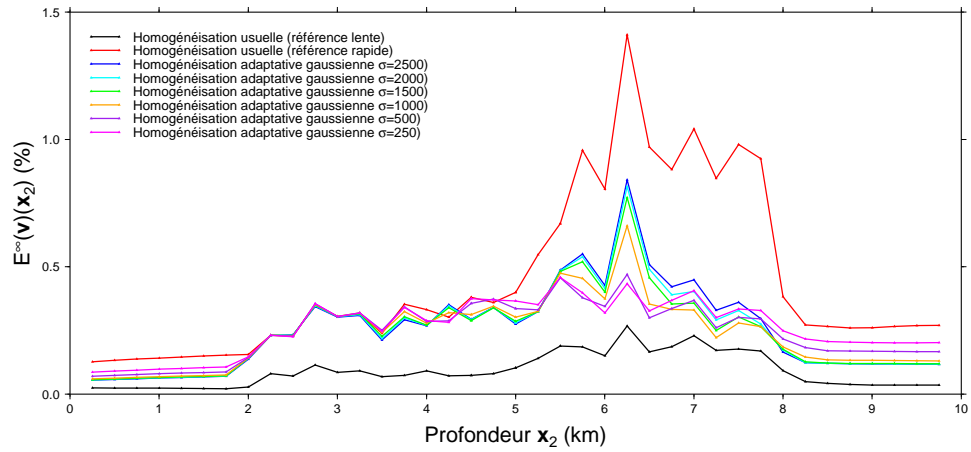


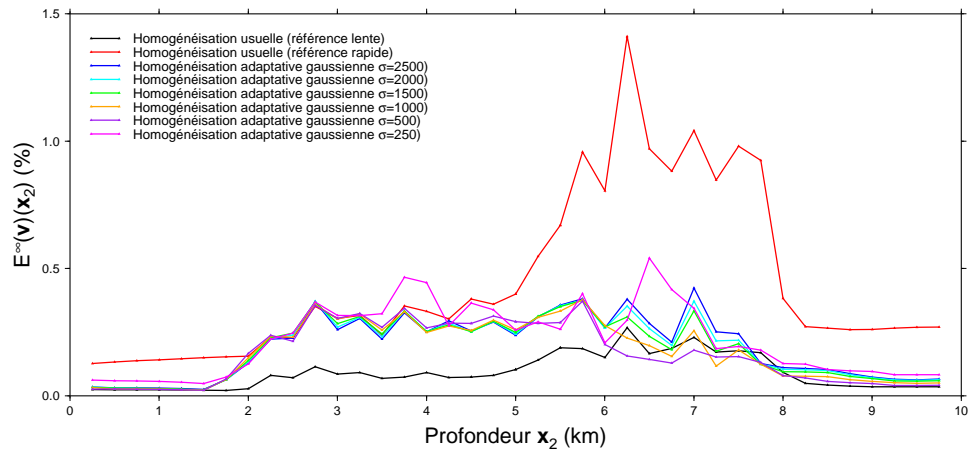
FIGURE 3.7 – Cartes 2D de V^- (\mathbf{x}) (Figures 3.7(a) à 3.7(f)) et profils verticaux moyens de V^- (Figure 3.7(g)) dans le cas de la méthode d'homogénéisation adaptative à profil larges échelles 2D pour différentes valeurs de σ (filtre gaussien).

Profils verticaux d'erreur pour $\varepsilon_0=0.2$



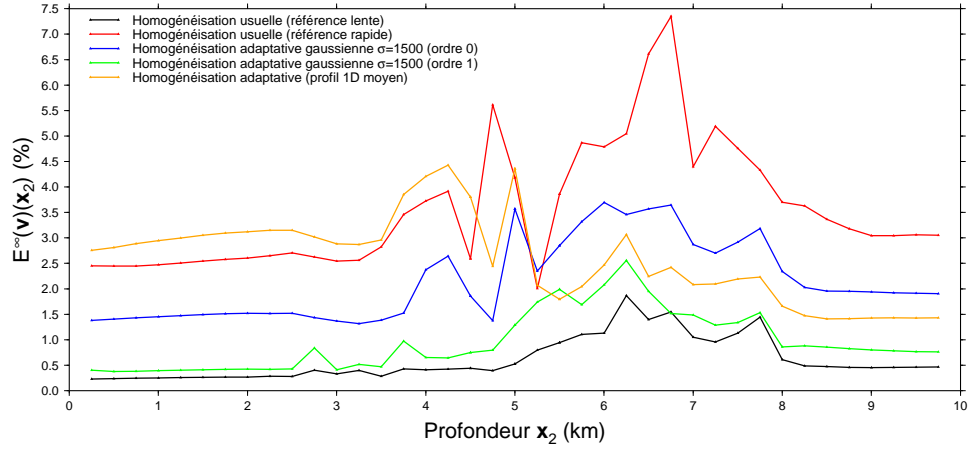
(a) Ordre 0

Profils verticaux d'erreur pour $\varepsilon_0=0.2$

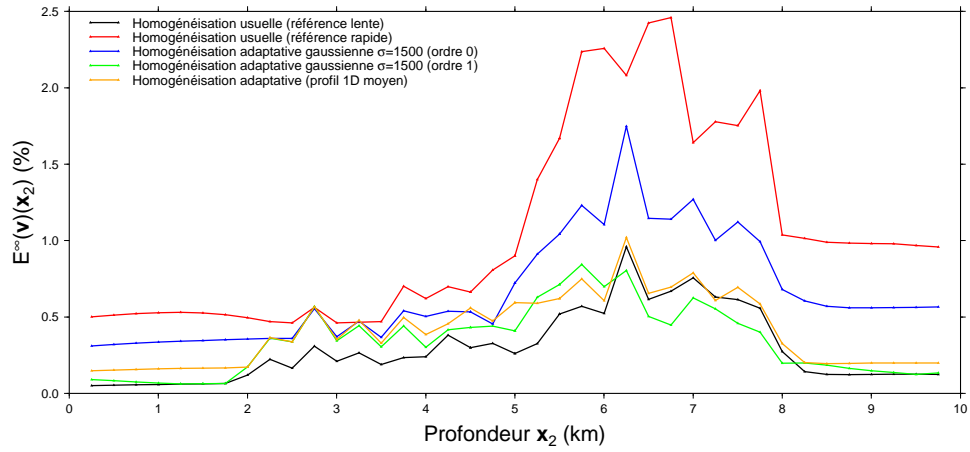


(b) Ordre 1

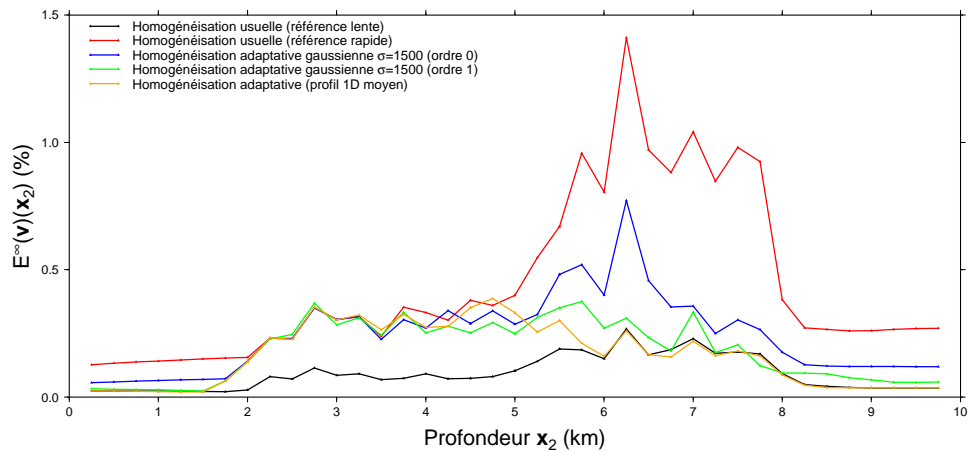
FIGURE 3.8 – Courbes d'erreur E^∞ en fonction de la profondeur pour HURL (courbe noire) et HURR (courbe rouge) et pour l'homogénéisation adaptative à profil larges échelles 2D pour différentes valeurs de σ (filtre gaussien) dans le cas de l'approximation d'ordre 0 (3.8(a)) et d'ordre 1 (3.8(b)).

Profils verticaux d'erreur pour $\varepsilon_0=0.8$ 

(a)

Profils verticaux d'erreur pour $\varepsilon_0=0.4$ 

(b)

Profils verticaux d'erreur pour $\varepsilon_0=0.2$ 

(c)

FIGURE 3.9 – Courbes d'erreur $E^\infty(\mathbf{v})$ en fonction de la profondeur pour trois valeurs de ε_0 (Figures 3.9(a), 3.9(b), 3.9(c)). On visualise les courbes obtenues par HURL (courbe noire) et HURR (courbe rouge) ainsi que celle obtenue par l'homogénéisation adaptative à profil 1D moyen (courbe orange) pour référence, et celles obtenues par l'homogénéisation adaptative à profil 2D pour $\sigma = 1500$ m (filtre gaussien) dans le cas de l'approximation d'ordre 0 (courbe bleue) et d'ordre 1 (courbe verte).

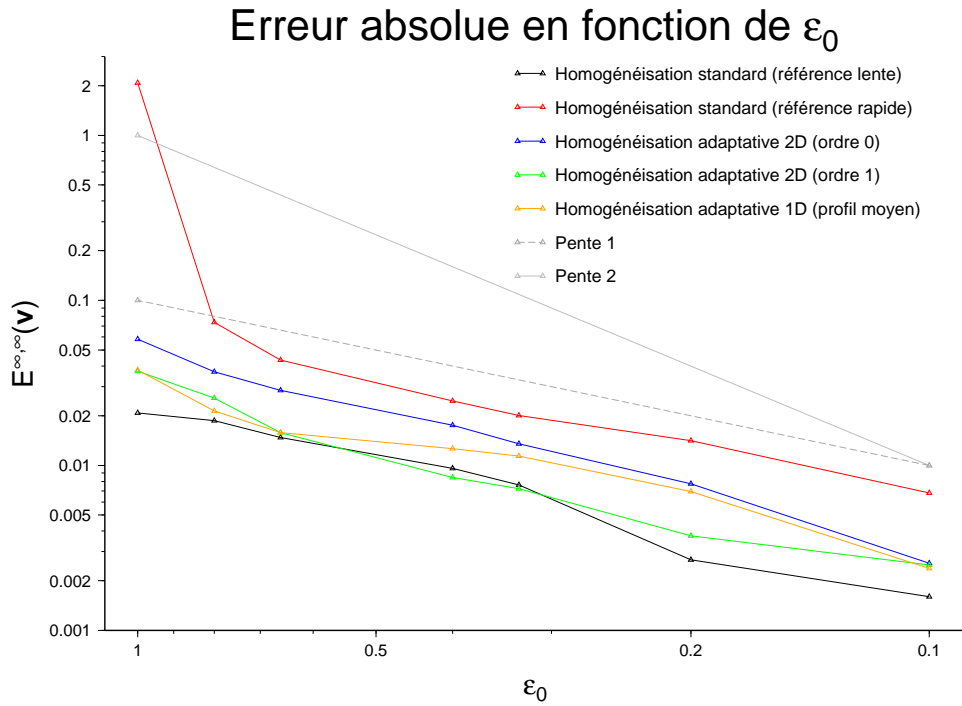


FIGURE 3.10 – Courbe d'erreur $E^{\infty, \infty}(\mathbf{v})$ en fonction de ε_0 . On visualise les courbes obtenues par HURL (courbe noire) et HURR (courbe rouge) ainsi que celle obtenue par l'homogénéisation adaptative à profil 1D moyen (courbe orange) pour référence, et celles obtenues par l'homogénéisation adaptative à profil 2D pour $\sigma = 1500$ m (filtre gaussien) dans le cas de l'approximation d'ordre 0 (courbe bleue) et d'ordre 1 (courbe verte).

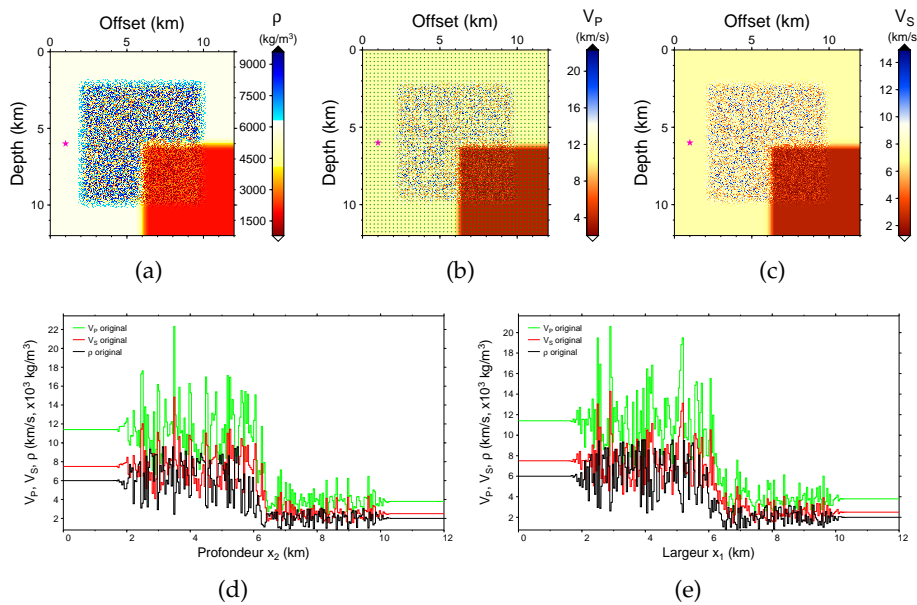


FIGURE 3.11 – Carte 2D de vitesses d'ondes S (Figure 3.11(c)), d'ondes P (Figure 3.11(b)) et de densité (Figure 3.11(a)) pour un milieu à 2 plateaux, et profils verticaux pour $x_1 = 9$ km (Figure 3.11(d)) et horizontaux pour $x_2 = 9$ km (Figure 3.11(e)) de vitesses d'ondes S (rouge), d'ondes P (vert) et de densité (noir). L'étoile rose dénote le placement de la source explosive, les diamants verts (Figure 3.11(b)) dénotent la position des récepteurs (1 récepteur tous les 250 m dans chaque direction).

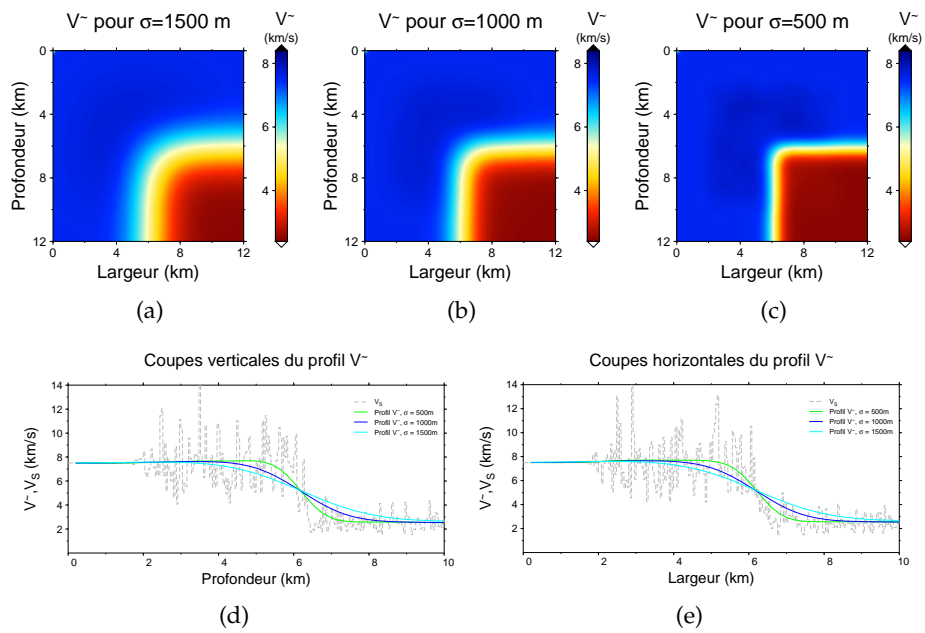
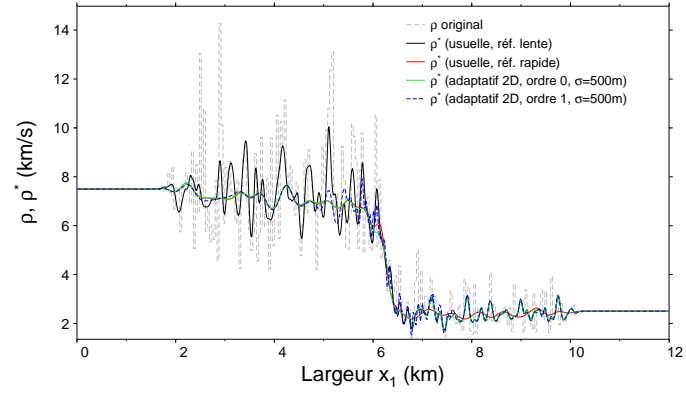
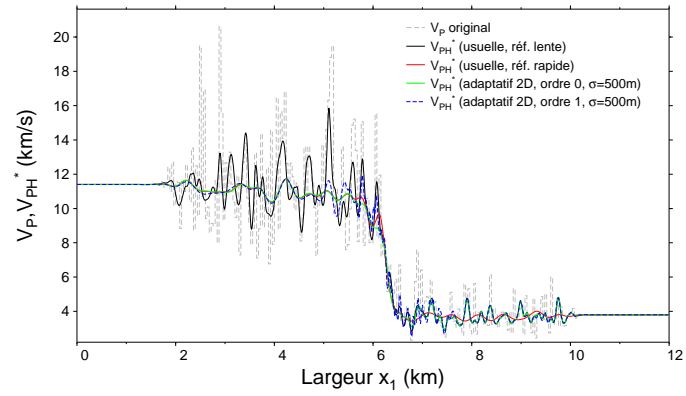


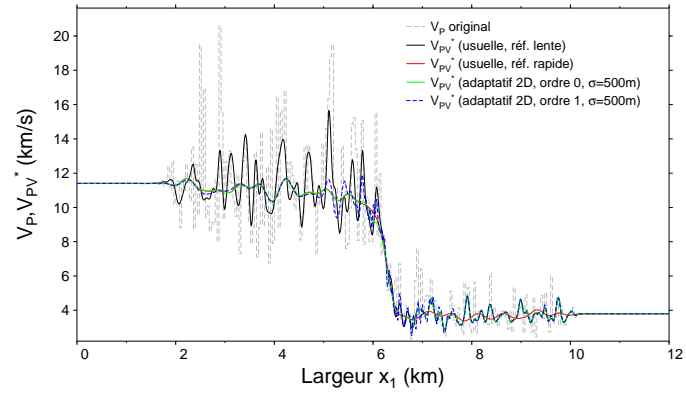
FIGURE 3.12 – Profils 2D $V^-(\mathbf{x})$ gaussiens pour $\sigma = 1.5$ km (3.12(a)), $\sigma = 1$ km (3.12(b)) et $\sigma = 0.5$ km (3.12(c)) et profils associés verticaux pour $x_1 = 9$ km (Figure 3.12(d)) et horizontaux pour $x_2 = 9$ km (Figure 3.12(e))



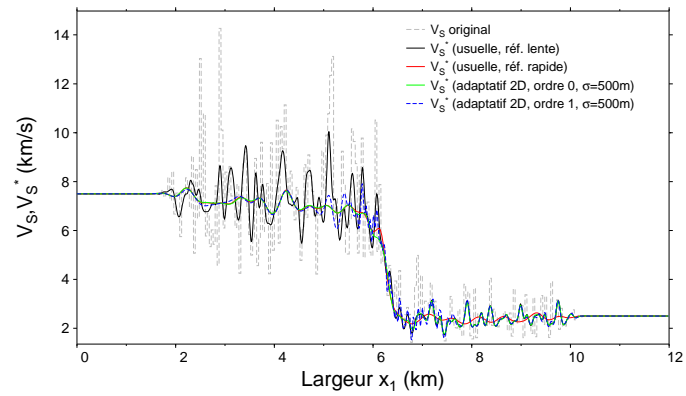
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURE 3.13 – Profils horizontaux ($x_2 = 9$ km) des paramètres effectifs obtenus pour $\varepsilon_0 = 0.4$ et $\sigma = 0.5$ km.

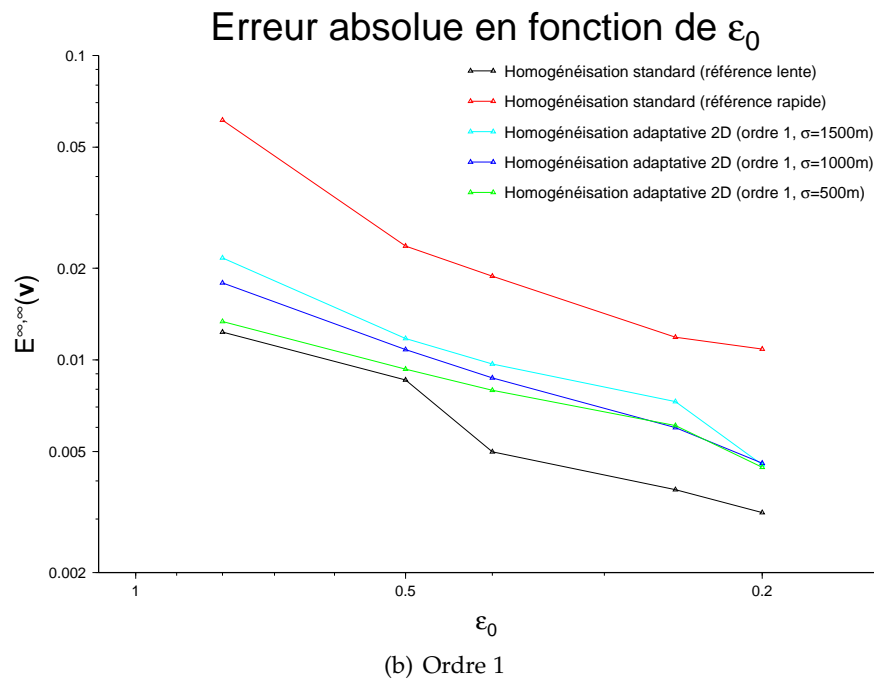
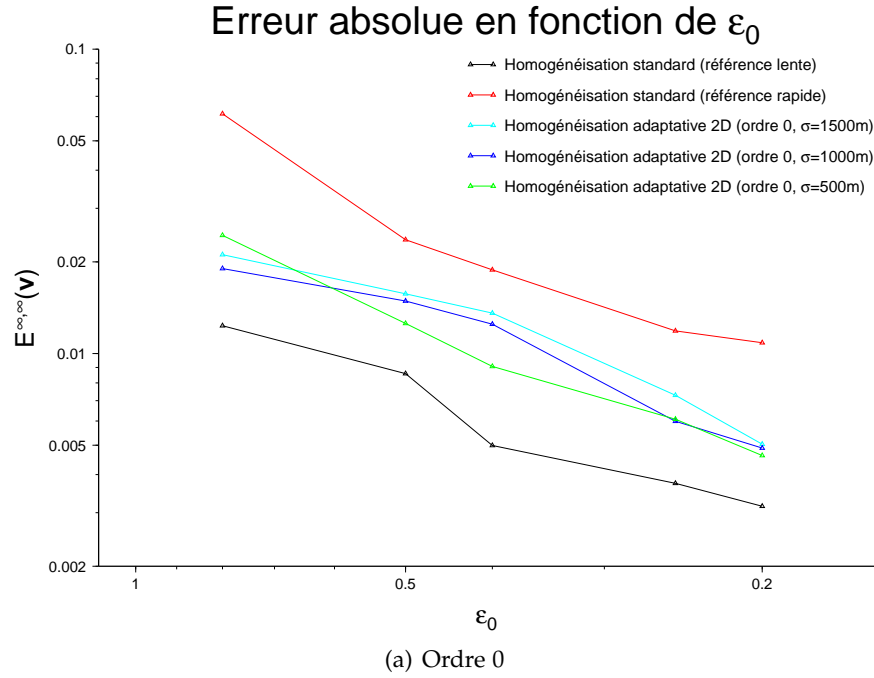


FIGURE 3.14 – Erreur totale en fonction de ε_0 pour les méthodes d'homogénéisation adaptatives à profil 2D d'ordre 0 (3.14(a)) et 1 (3.14(b)).

HOMOGENÉISATION RÉSIDUELLE 2D

4

INTRODUCTION

Dans les chapitres précédents, nous décrivons et utilisons essentiellement la méthode d'homogénéisation des ondes élastiques et acoustiques pour des problématiques se plaçant dans le cadre de la résolution du problème direct, c'est-à-dire le calcul de la forme d'onde connaissant le milieu, hétérogène, de propagation. Il est cependant possible de relier l'homogénéisation au problème inverse, c'est-à-dire au calcul des propriétés élastiques du milieu à partir de données mesurées comme les temps d'arrivée des ondes ou la forme d'onde complète.

Dans le cadre de l'inversion de forme d'onde, on travaille généralement en bande de fréquence finie que ce soit par choix (seule une bande de fréquence nous intéresse) ou par obligation (coût calcul). Dès lors, on retrouve la notion de plus petite longueur d'onde et la résolution du modèle élastique obtenu par inversion est limitée. Ce modèle élastique est alors celui que voient les ondes et peut donc être considéré comme une version effective, ou homogénéisée, du modèle élastique réel.

Cette interprétation peut cependant être nuancée, car la procédure d'homogénéisation telle que nous l'avons décrite jusqu'à présent fournit un modèle élastique effectif *continu*, alors que les procédures d'inversion utilisent et retrouvent généralement des modèles possédant des discontinuités bien identifiées (par exemple le Moho) et que l'on veut conserver. Ainsi le modèle élastique retrouvé par inversion n'est pas directement un modèle homogénéisé mais plus probablement la combinaison d'un modèle de référence pouvant contenir des discontinuités, *a priori* le modèle de référence utilisé pour l'inversion, et d'un modèle lisse issu d'un problème d'homogénéisation.

Cette hypothèse a été confirmée dans le cas des milieux stratifiés par le travail de Capdeville et al. (2013) introduisant la notion d'homogénéisation résiduelle. Celle-ci correspond à l'homogénéisation de la différence entre un milieu initial et un milieu de référence ce qui permet de restituer le milieu de référence dans le milieu effectif ainsi obtenu. Dans son principe, on peut donc voir l'homogénéisation résiduelle comme une manière de combiner un milieu de référence et un résidu homogénéisé. Dans le cas stratifié, l'existence d'une solution analytique au problème d'homogénéisation simplifie le travail de construction de l'homogénéisation résiduelle. Cependant, ces résultats analytiques ne peuvent pas s'éten-

dre au cas 2D général, et il est alors nécessaire de construire spécifiquement la procédure d'homogénéisation résiduelle à partir de celle définie par Capdeville et al. (2010b). Cette construction à 2D fait l'objet de la première partie de ce chapitre, les deux parties suivantes correspondant chacune à un cas d'application spécifique.

Dans le premier cas d'application, on cherche à optimiser le coût calcul du problème direct dans un milieu élastique complexe dont le maillage éléments spectraux est problématique. La géométrie particulière du modèle implique que l'homogénéisation usuelle ne fournit pas une solution satisfaisante à cause d'une erreur localisée induite par l'homogénéisation. La capacité de l'homogénéisation résiduelle à sélectionner la zone que l'on veut homogénéiser par une définition appropriée du modèle de référence apporte alors une solution pour réduire l'erreur commise tout en optimisant le coût calcul.

Dans le second cas d'application, on exploite le principe de combinaison de modèles de l'homogénéisation résiduelle. Cette méthode permet en effet de considérer sous un nouveau jour la problématique de la combinaison de milieux élastiques définis à des échelles différentes. Par exemple, l'inversion d'un même jeu de données pour deux bandes de fréquences distinctes permet de définir un milieu $M1$ de basse résolution et un milieu $M2$ de plus haute résolution. Ces modèles décrivant le même milieu, l'un aux basses fréquences, l'autre aux hautes fréquences, ils doivent rester compatibles entre eux aux basses fréquences. En d'autres termes, les réponses (sismogrammes) à une source basse fréquence des modèles $M1$ et $M2$ doivent être équivalentes. De plus, il doit être possible de combiner ces deux modèles en une unique version dont la réponse basse fréquence correspond à celle de $M1$ et, idéalement, dont la réponse aux hautes fréquences correspond à celle de $M2$. Nous montrons alors que l'utilisation de l'homogénéisation résiduelle permet de combiner correctement ces différents modèles pour construire le milieu multi-échelles correspondant.

4.1 HOMOGENEISATION RÉSIDUELLE

4.1.1 Principe général

L'objectif de l'homogénéisation usuelle est de déterminer un modèle effectif qui est équivalent aux basses fréquences à un modèle donné. Le modèle effectif ne contient alors plus d'oscillations de longueurs d'ondes plus petites que λ_0 . Pour ce faire, l'homogénéisation usuelle utilise un opérateur de filtrage passe-bas $\mathcal{F}^{\lambda_0}(\cdot)$ non pas directement sur les paramètres élastiques, mais sur les tenseurs intermédiaires $\mathbf{H}^{\varepsilon_0}$ et $\mathbf{G}^{\varepsilon_0}$ issus du problème de cellule (équations 1.135-1.138). Ainsi on peut dire que la meilleure représentation du milieu élastique au sens de l'homogénéisation est celle fournie par ces deux tenseurs que l'on appellera *concentrateurs*. Il est donc naturel que les modifications apportées par l'homogénéisation résiduelle interviennent sur ces tenseurs privilégiés.

L'objectif de l'homogénéisation résiduelle est de construire un modèle effectif respectant de surcroît les variations d'un modèle dit de référence défini par l'utilisateur. Non seulement le milieu effectif doit être équiva-

lent au milieu initial pour une sollicitation basse fréquence, mais il doit toujours contenir les oscillations, arbitrairement rapides, du milieu de référence. Il est possible de considérer l'homogénéisation résiduelle comme une généralisation de la méthode d'homogénéisation usuelle au sens où l'homogénéisation usuelle n'est conservatrice que de la réponse basse fréquence du milieu, alors que l'homogénéisation résiduelle est aussi conservatrice du milieu de référence. Il semble alors assez intuitif que les termes correspondant au modèle de référence se regroupent avec les termes de filtrage du modèle initial.

Les modifications apportées par la méthode d'homogénéisation résiduelle interviennent uniquement sur la méthode de construction du modèle élastique dit "initial" $(\rho^{\varepsilon_0}, \mathbf{c}^{\varepsilon_0})(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ défini à la fois en fonction des variables lentes \mathbf{x} et rapides \mathbf{y} . Nous rappelons brièvement cette procédure, qui est au coeur de l'homogénéisation des milieux non périodiques, dans le cadre de l'homogénéisation usuelle avant de définir rigoureusement la procédure d'homogénéisation résiduelle.

4.1.2 Construction de la paramétrisation initiale de l'homogénéisation non périodique usuelle

Pour homogénéiser un milieu défini par le modèle élastique $(\rho(\mathbf{x}), \mathbf{c}(\mathbf{x}))$ sur le domaine Ω , il est nécessaire de pouvoir résoudre le problème de cellule (1.135-1.138),

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\mathbf{H}^{\varepsilon_0}) = 0, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{H}^{\varepsilon_0} = \mathbf{c}^{\varepsilon_0} : \mathbf{G}^{\varepsilon_0}, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{G}^{\varepsilon_0} = \mathbf{I} + \epsilon_{\mathbf{y}} \circ \chi^{\varepsilon_0}, \quad (4.3)$$

$$\langle \chi^{\varepsilon_0} \rangle = 0, \quad (4.4)$$

avec conditions périodiques au bords, $\chi^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et $\mathbf{H}^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ étant dans l'espace fonctionnel particulier \mathcal{V} .

Pour cela, l'ensemble du problème théorique d'homogénéisation repose sur une construction correcte d'un modèle initial $(\rho^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{c}^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$. On rappelle alors qu'une telle construction, pour ε_0 fixé, suit les étapes suivantes :

1. Construction d'une paramétrisation de départ

$$(\rho^{\varepsilon_0, s}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{c}^{\varepsilon_0, s}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = (\rho(\varepsilon_0 \mathbf{y}), \mathbf{c}(\varepsilon_0 \mathbf{y})), \quad (4.5)$$

définie sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbf{Y}_{\mathbf{x}}$ et étendue par $\mathbf{Y}_{\mathbf{x}}$ -périodicité. Les quantités $\rho^{\varepsilon_0, s}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et $\mathbf{c}^{\varepsilon_0, s}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sont alors dans \mathcal{T} .

2. Résolution du problème de cellule (4.1-4.4) en utilisant cette paramétrisation de départ. On obtient le correcteur de départ $\chi^{\varepsilon_0, s}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et les concentrateurs $\mathbf{H}^{\varepsilon_0, s}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et $\mathbf{G}^{\varepsilon_0, s}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ eux aussi dans \mathcal{T} .
3. Construction des tenseurs d'homogénéisation $\mathbf{H}^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et $\mathbf{G}^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (qui sont alors bien dans l'espace \mathcal{V}) par

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{I} + \left[\left(\mathbf{G}^{\varepsilon_0, s} - \mathcal{F}^{\lambda_0}(\mathbf{G}^{\varepsilon_0, s}) \right)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] \\ : \left[\mathcal{F}^{\lambda_0}(\mathbf{G}^{\varepsilon_0, s}) \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_0} \right) \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

et

$$\mathbf{H}^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left[\mathcal{F}^{\lambda_0}(\mathbf{H}^{\varepsilon_0, S}) \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_0} \right) + \left(H^{\varepsilon_0, S} - \mathcal{F}^{\lambda_0}(H^{\varepsilon_0, S}) \right) (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] : \left[\mathcal{F}^{\lambda_0}(\mathbf{G}^{\varepsilon_0, S}) \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_0} \right) \right]^{-1}, \quad (4.7)$$

le correcteur $\chi^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ étant obtenu en solvant 4.3.

4. Construction du modèle initial par

$$\rho^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathcal{F}^{\lambda_0}(\rho^{\varepsilon_0, S}) \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_0} \right) + \left(\rho^{\varepsilon_0, S} - \mathcal{F}^{\lambda_0}(\rho^{\varepsilon_0, S}) \right) (\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (4.8)$$

$$\mathbf{c}^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{H}^{\varepsilon_0} : (\mathbf{G}^{\varepsilon_0})^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (4.9)$$

5. Construction du modèle homogénéisé grâce à

$$\rho^{*, \varepsilon_0}(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{\lambda_0}(\rho^{\varepsilon_0}) \text{ et} \quad (4.10)$$

$$\mathbf{c}^{*, \varepsilon_0}(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{\lambda_0}(\mathbf{H}^{\varepsilon_0, S}) : \left(\mathcal{F}^{\lambda_0}(\mathbf{G}^{\varepsilon_0, S}) \right)^{-1} \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_0} \right), \quad (4.11)$$

ce qui conclut la méthode.

Remarque (interprétation physique) : on rappelle que le problème de cellule peut aussi s'écrire en termes de forces sous forme indicielle

$$\nabla \cdot (\mathbf{c}^{\varepsilon_0, S} : \epsilon(\chi^{\varepsilon_0, mn})) = \mathbf{F}^{mn}, \quad (4.12)$$

$$\mathbf{F}^{mn} = -\nabla \cdot (\mathbf{c}^{\varepsilon_0, S} : e_m \otimes e_n), \quad (4.13)$$

$$\langle \chi^{\varepsilon_0} \rangle = 0. \quad (4.14)$$

Cette formulation permet alors d'interpréter le problème de cellule comme étant une version numérique d'une expérience physique permettant usuellement de déterminer les propriétés élastiques d'un matériau donné. Pour déterminer un paramètre élastique pour un matériau donné, on applique une charge connue (force/contrainte) en un point donné du matériau et selon une direction précise, on mesure la déformation du matériau et la relation entre déformation et contrainte permet alors de déterminer le paramètre souhaité. Le problème de cellule généralise cette expérience car $e_m \otimes e_n$ décrit l'ensemble des chargements possibles du matériau de propriétés élastiques définies par $\mathbf{c}^{\varepsilon_0, S}$, les tenseurs $\mathbf{G}^{\varepsilon_0, S}$ et $\mathbf{H}^{\varepsilon_0, S}$ concentrent alors respectivement les déformations et les contraintes associées. On note alors que le tenseur élastique effectif est construit par recombinaison des versions basses fréquences, filtrées, de ces quantités.

L'homogénéisation résiduelle se définit entièrement par une adaptation de la construction initiale usuelle (points 1 à 5) en vue de conserver la partie basse fréquence du modèle initial et la partie haute fréquence du modèle de référence dans le modèle effectif.

4.1.3 Construction du modèle effectif et des correcteurs pour l'homogénéisation résiduelle

On commence par définir clairement les deux modèles élastiques nécessaires :

- le modèle initial (ρ, \mathbf{c}) ,
- le modèle de référence (ρ^0, \mathbf{c}^0) .

Le modèle initial correspond au milieu physique réel décrit aux petites échelles pour lequel on veut calculer un milieu effectif à une échelle λ_0 donnée. Le modèle de référence est un modèle arbitrairement défini par l'utilisateur. Il contient des variations que l'utilisateur veut préserver dans le milieu effectif. Si le modèle de référence est constant, alors le milieu effectif issu de l'homogénéisation résiduelle sera le même que le milieu issu de l'homogénéisation usuelle. Si le modèle de référence est choisi égal au milieu initial, alors le milieu homogénéisé correspond au modèle initial. En général, le modèle de référence est choisi pour ne conserver que des parties spécifiques du modèle initial (par exemple une discontinuité).

La construction du modèle initial pour l'homogénéisation résiduelle de paramètre ε_0 suit les étapes suivantes :

1. on construit des modèles de départ pour le modèle initial et le modèle de référence de la même manière que pour l'homogénéisation usuelle c'est-à-dire par

$$(\rho_s, \mathbf{c}_s)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\rho, \mathbf{c})(\varepsilon_0 \mathbf{y}) \text{ et} \quad (4.15)$$

$$(\rho_s^0, \mathbf{c}_s^0)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\rho^0, \mathbf{c}^0)(\varepsilon_0 \mathbf{y}) , \quad (4.16)$$

où l'indice s signifie *start*, et pour lesquels on abandonne l'index ε_0 afin d'alléger les notations.

2. on résout le problème de cellule deux fois, une fois pour le modèle initial et une fois pour le modèle de référence. Deux correcteurs initiaux sont alors obtenus, un pour le milieu initial et un pour le milieu de référence.
3. on construit les couples de concentrateurs initiaux
 - $(\mathbf{G}_s, \mathbf{H}_s)$ pour le modèle initial,
 - $(\mathbf{G}_s^0, \mathbf{H}_s^0)$ pour le modèle de référence,
 et on définit les quantités résiduelles associés par

$$\delta \mathbf{G}_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{G}_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathbf{G}_s^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) , \quad (4.17)$$

$$\delta \mathbf{H}_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{H}_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathbf{H}_s^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) , \quad (4.18)$$

$$\delta \rho_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \rho_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \rho_s^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) . \quad (4.19)$$

À ce stade, on a obtenu les descriptions au sens de l'homogénéisation (par les concentrateurs de déformation et de contrainte) du modèle initial et du modèle de référence. Combiner ces descriptions (les concentrateurs) revient donc à combiner les modèles au sens de l'homogénéisation.

4. Les concentrateurs servant effectivement pour l'homogénéisation sont maintenant

$$\mathbf{G}^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left[\left(\mathbf{G}_s^0 + \mathcal{F}^{k_0}(\delta \mathbf{G}_s) \right) \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_0} \right) + \left(\delta \mathbf{G}_s - \mathcal{F}^{k_0}(\delta \mathbf{G}_s) \right) (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] : \left[\left(\mathbf{G}_s^0 + \mathcal{F}^{k_0}(\delta \mathbf{G}_s) \right) \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_0} \right) \right]^{-1}, \quad (4.20)$$

et

$$\mathbf{H}^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left[\left(\mathbf{H}_s^0 + \mathcal{F}^{k_0}(\delta \mathbf{H}_s) \right) \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_0} \right) + \left(\delta \mathbf{H}_s - \mathcal{F}^{k_0}(\delta \mathbf{H}_s) \right) (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] : \left[\left(\mathbf{G}_s^0 + \mathcal{F}^{k_0}(\delta \mathbf{G}_s) \right) \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_0} \right) \right]^{-1}, \quad (4.21)$$

et le correcteur d'ordre 1 $\chi^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est toujours obtenu en résolvant 4.3 du problème de cellule. On voit ici que les concentrateurs sont définis à partir des concentrateurs du modèle de référence, corrigés de la version filtrée des écarts entre les concentrateurs des deux modèles (référence et initial).

5. la paramétrisation initiale correspondante est

$$\mathbf{c}^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\mathbf{H}^{\varepsilon_0} : (\mathbf{G}^{\varepsilon_0})^{-1} \right) (\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (4.22)$$

$$\rho^{\varepsilon_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\rho_s^0 + \mathcal{F}^{\lambda_0}(\delta \rho_s) \right) \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_0} \right) + \left(\delta \rho_s - \mathcal{F}^{\lambda_0}(\delta \rho_s) \right) (\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (4.23)$$

6. le tenseur élastique effectif résiduel s'obtient finalement grâce à

$$\mathbf{c}^{*,\varepsilon_0}(\mathbf{x}) = \left(\mathbf{H}_s^0 + \mathcal{F}^{k_0}(\delta \mathbf{H}_s) \right) : \left(\mathbf{G}_s^0 + \mathcal{F}^{k_0}(\delta \mathbf{G}_s) \right)^{-1}(\mathbf{x}), \quad (4.24)$$

et la densité effective s'obtient simplement par

$$\rho^{*,\varepsilon_0}(\mathbf{x}) = \left(\rho_s^0 + \mathcal{F}^{k_0}(\delta \rho_s) \right) \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_0} \right) = \rho^0(\mathbf{x}) + \mathcal{F}^{k_0}(\delta \rho)(\mathbf{x}). \quad (4.25)$$

La relation 4.24 montre ainsi que le tenseur élastique effectif est défini par les concentrateurs du modèle de référence, corrigés de la version basse fréquence des écarts entre concentrateurs issus du modèle initial et du modèle de référence.

Avec une telle construction, les correcteurs et concentrateurs sont à nouveau dans \mathcal{V} , et la paramétrisation initiale $(\rho^{\varepsilon_0}, \mathbf{c}^{\varepsilon_0})(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est à nouveau compatible avec les développements théoriques présentés pour la méthode d'homogénéisation usuelle. En particulier, les solutions du problème d'homogénéisation sont toujours dans les bons espaces et on obtient le même type de convergence en $O(\varepsilon_0)$ que pour l'homogénéisation usuelle. Si en terme de vitesse de convergence aucune amélioration n'a été apportée, la constante du reste $O(\varepsilon_0)$ a été modifiée, ce que nous observons dans le premier exemple.

Numéro de matériau	V_P (km/s)	V_S (km/s)	ρ (kg/m ³)
(0)	5.6	3.2	3000
(1)	2.9	1.6	1500
(2)	4.4	2.45	2300
(3)	7.5	4.1	3900

TABLE 4.1 – Paramètres élastiques du milieu utilisé dans la section 4.2

4.2 OPTIMISATION DE MAILLAGE

4.2.1 Introduction

La première application de l'homogénéisation résiduelle que nous nous proposons d'étudier ici concerne l'optimisation du temps de calcul par rapport à l'erreur commise dans le cadre du problème direct. Nous introduisons d'abord le modèle élastique utilisé et le maillage associé qui est localement très fin et déformé, puis nous utilisons l'homogénéisation usuelle pour réduire le problème lié à la finesse locale du maillage. Dans le cas présent, l'homogénéisation du milieu complet présente l'inconvénient de nécessiter un très petit ε_0 pour obtenir une bonne convergence de la forme d'ondes. Nous montrons alors que l'homogénéisation résiduelle permet d'obtenir une précision similaire à celle obtenue par l'homogénéisation usuelle pour un coût calcul bien moindre.

Modèle initial

Le modèle élastique que nous utilisons est décrit par la Figure 4.1 et la Table 4.1. S'il ne s'agit pas d'un milieu géologique réaliste à proprement parler, ce milieu permet de simuler la complexité d'une situation réaliste que l'on peut retrouver par exemple dans un bassin sédimentaire. Il consiste en un milieu principalement homogène, défini par le matériau (0) de la Table 4.1, avec une fine couche (100 m d'épaisseur) à la surface aux propriétés élastiques différentes et deux structures complexes inclinées définies chacune comme un milieu lamellé périodique à deux couches de période 140 m. On utilise une source explosive dont la fonction temporelle est un Ricker de fréquence centrale 1.1 Hz permettant une fréquence maximale d'environ 3.2 Hz et une estimation de la longueur d'onde minimale de 1 km dans le milieu homogène principal. Avec une telle estimation de la longueur d'onde minimale du champ d'ondes, les difficultés attendues sont liées aux structures beaucoup plus fines, c'est-à-dire à la couche superficielle d'une part mais surtout aux deux structures inclinées notamment à leur jonction avec la couche superficielle où les structures sont imbriquées. En effet, ces structures fines discontinues imposent localement la taille des éléments du maillage.

Maillage

Dans le milieu homogène (0), pour une longueur d'onde minimale de 1 km, l'utilisation d'un degré 5 pour l'interpolation polynômiale de la méthode des éléments spectraux permettrait un bon échantillonnage des ondes pour une taille d'éléments de $1 \times 1 \text{ km}^2$. Cependant, le milieu n'est

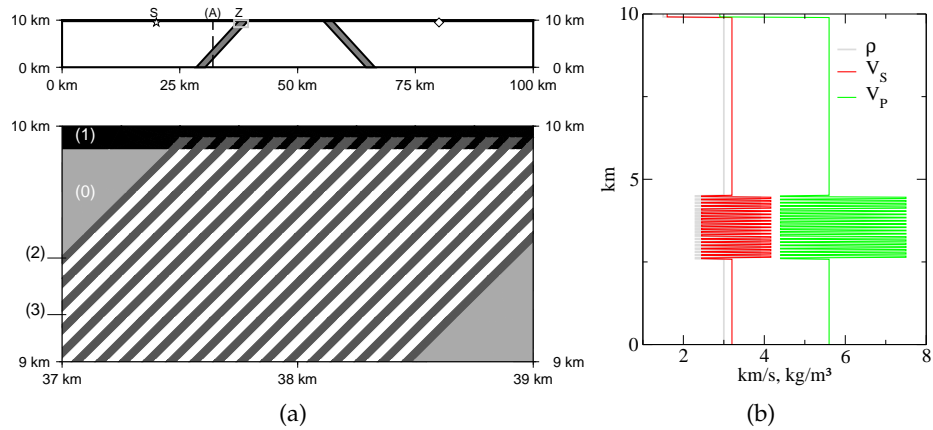


FIGURE 4.1 – Description du milieu initial. 4.1(a) - partie supérieure : schéma 2D descriptif du milieu initial, l'étoile (S) marque l'emplacement de la source, le diamant marque l'emplacement du récepteur. 4.1(a) - partie inférieure : zoom correspondant au rectangle (Z) du schéma 2D. Le milieu est constitué de 4 types de matériaux homogènes isotropes différents dont les paramètres sont définis en table 4.1. 4.1(b) : coupe verticale des paramètres du milieu correspondant à la ligne (A) du schéma 2D.

pas partout homogène et le maillage des discontinuités devient la condition la plus restrictive pour établir le maillage. On utilise *Gmsh* (Geuzaine et Remacle 2009) pour obtenir le maillage du milieu initial respectant cette contrainte et illustré en Figure 4.2 (partie supérieure). Ce maillage est raffiné au niveau de la couche superficielle et surtout au niveau des structures inclinées pour lesquelles les mailles sont de plus très déformées. Les éléments étant très fins, le pas de temps doit lui aussi être restreint pour satisfaire la condition CFL ce qui conduit à un coût calcul élevé. Dans cet exemple, la simplification du maillage telle que le permet la procédure d'homogénéisation devient donc un atout significatif.

4.2.2 Homogénéisation usuelle

Dans le cadre de l'homogénéisation, la présence de micro-structures à proximité de la surface libre nécessite théoriquement le calcul et l'utilisation des correcteurs d'ordre 1 au bord (Capdeville et Marigo 2008; 2013). Pour éviter cet écueil, on utilise une symétrisation du milieu par rapport à la surface libre telle que proposée par Capdeville et Marigo (2007). En tant que premier essai, on utilise l'homogénéisation usuelle avec un paramètre d'homogénéisation $\varepsilon_0 = 0.5$.

Modèle effectif

Comme attendu, le milieu effectif $(\rho^{\varepsilon_0,*}, c^{\varepsilon_0,*})$ obtenu est anisotrope. Pour décrire ce milieu effectif et son anisotropie, on utilise ici les travaux de Browaeys et Chevrot (2004). Le tenseur élastique est alors vu comme un vecteur évoluant dans un espace vectoriel normé (de norme $\|\cdot\|$). À chaque symétrie du tenseur élastique correspond alors un sous-espace vectoriel de l'espace initial. Les symétries d'ordre élevé impliquant les symétries d'ordre moins élevé, les sous-espaces considérés sont imbriqués. Pour chacun de ces sous-espaces, une projection orthogonale est construite permettant,

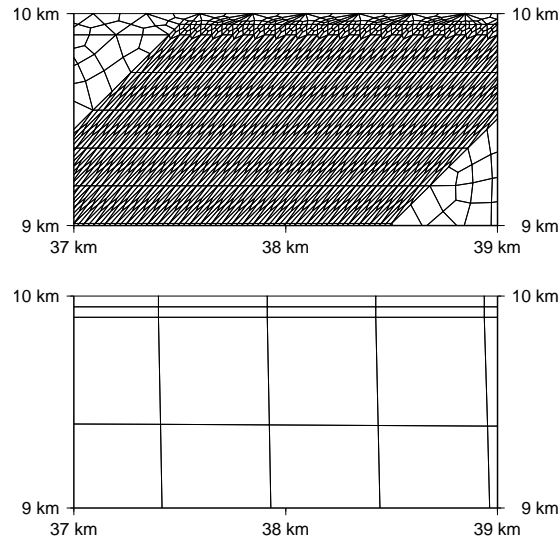


FIGURE 4.2 – Maillages générés par Gmsh (Geuzaine et Remacle 2009) pour le milieu initial (partie supérieure) et pour le milieu de référence de l’homogénéisation résiduelle (partie inférieure).

pour un tenseur quelconque \mathbf{c} et une symétrie s fixés de définir le tenseur \mathbf{c}_s de symétrie s le plus proche du tenseur \mathbf{c} au sens de la norme $\|\cdot\|$.

Pour décrire l’anisotropie du milieu effectif obtenu par la procédure d’homogénéisation, on calcule le milieu effectif isotrope $(\rho^{\varepsilon_0,*}, \mathbf{c}_{iso}^{\varepsilon_0,*})$ le plus proche par cette méthode de projection. À partir de ce milieu isotrope,

on calcule une vitesse $V_S = \sqrt{\frac{(\mathbf{c}_{iso}^{\varepsilon_0,*})_{1212}}{\rho^{\varepsilon_0,*}}}$ d’ondes S puis une mesure d’anisotropie par $\|\mathbf{c}^{\varepsilon_0,*} - \mathbf{c}_{iso}^{\varepsilon_0,*}\| / \|\mathbf{c}^{\varepsilon_0,*}\|$, la norme utilisée étant toujours celle de Browaeys et Chevrot (2004). La Figure 4.3 montre la répartition 2D et des coupes verticales en deux endroits pour ces deux quantités. On observe alors une forte anisotropie, donc une forte influence de l’homogénéisation, au niveau des structures inclinées mais aussi au niveau de la couche superficielle.

Précision sur la forme d’ondes

Une fois le milieu effectif obtenu, on effectue le calcul de la forme d’ondes en l’introduisant dans le code éléments spectraux. Le milieu effectif étant continu, le maillage élément spectraux utilisé peut alors se résumer à une grille régulière. Cependant, comme nous l’avons vu précédemment (chapitres 1 et 3), ce maillage effectif est d’autant plus fin que ε_0 est petit (relations 1.165 et 1.166). Les courbes de la composante horizontale du déplacement, obtenues pour le récepteur placé en surface à 60 km de la source par le calcul éléments spectraux dans le milieu original (courbe grise), dans le milieu homogénéisé avec $\varepsilon_0 = 0.5$ (courbe rouge) et dans le milieu obtenu par filtrage de la lenteur (courbe verte) sont données en Figure 4.4. On observe à nouveau que le milieu obtenu par simple filtrage de la lenteur ne permet pas d’obtenir une bonne convergence d’une part, et que les ondes de volumes (premières arrivées) sont bien modélisées par le milieu homogénéisé avec $\varepsilon_0 = 0.5$ d’autre part. En revanche, on observe un déphasage important entre le signal de référence et le signal obtenu

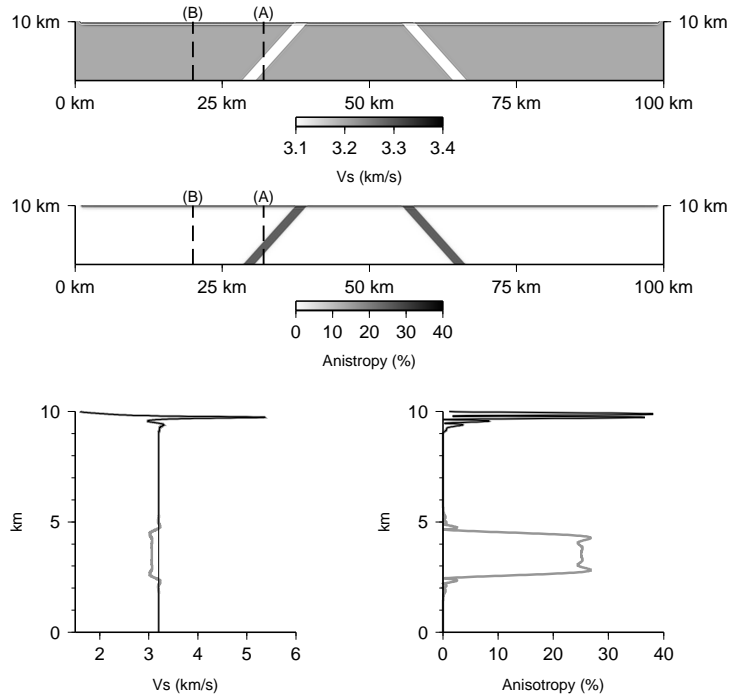


FIGURE 4.3 – Milieu effectif obtenu par homogénéisation usuelle du milieu initial (Figure 4.1) pour $\varepsilon_0 = 0.5$. Les deux graphes du haut montrent la carte des vitesses V_S d'ondes S pour le modèle isotrope le plus proche du modèle effectif et la carte d'anisotropie effective correspondante (Browaeys et Chevrot 2004). Les deux graphes du bas montrent les coupes verticales pour les vitesses d'ondes S isotropes et l'anisotropie effective correspondante selon les lignes (A) (courbe grise épaisse) et (B) (courbe noire fine) du graphe du haut.

après homogénéisation pour les ondes plus tardives correspondant ici à des ondes de surface (ondes de Rayleigh). Un tel déphasage s'explique par un grand effet de l'homogénéisation près de la surface. Les ondes de Rayleigh se propageant le long de cette surface, elles échantillonnent tout au long de leur trajet le milieu effectif de surface en cumulant l'erreur liée à l'homogénéisation dans cette zone. Pour de longs trajets, cette erreur cumulée devient clairement visible et se manifeste par le déphasage observé.

Afin d'obtenir une modélisation correcte de toute la forme d'ondes avec un milieu homogénéisé, il est nécessaire de réduire considérablement le paramètre ε_0 comme le montre la Figure 4.5 (colonne de droite). La problématique du coût calcul, lié à la finesse du maillage et du pas de temps, n'est donc ici que partiellement résolue par la méthode d'homogénéisation car plus ε_0 est petit et plus le maillage effectif doit rester fin (relation 1.165). Cette difficulté liée à l'erreur d'homogénéisation localisée sur la couche lente superficielle peut être résolue à l'aide de l'homogénéisation résiduelle.

4.2.3 Homogénéisation résiduelle

Notre objectif est toujours de simplifier au maximum le maillage à utiliser dans le milieu effectif. Ainsi, les structures inclinées doivent toujours être homogénéisées afin d'en simplifier le maillage. En revanche, l'erreur d'homogénéisation liée à la couche superficielle s'avérant pénal-

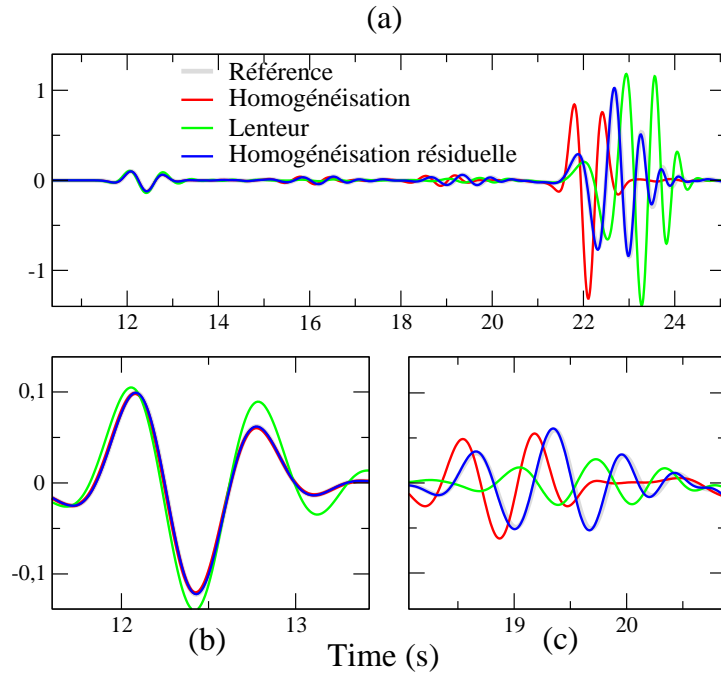


FIGURE 4.4 – Déplacement horizontal pour le récepteur (diamant de la Figure 4.1) situé à la surface libre à 60 km de la source. Le signal est calculé dans le milieu initial comme signal de référence (Référence), dans le milieu effectif calculé par l'homogénéisation usuelle avec $\varepsilon_0 = 0.5$ (Homogénéisation), dans le milieu obtenu par filtrage passe-bas de la lenteur (Lenteur), et dans le milieu effectif obtenu par l'homogénéisation résiduelle avec $\varepsilon_0 = 0.5$ (Homogénéisation résiduelle). (a) : signal complet, (b),(c) : zooms sur deux fenêtres temporelles différentes.

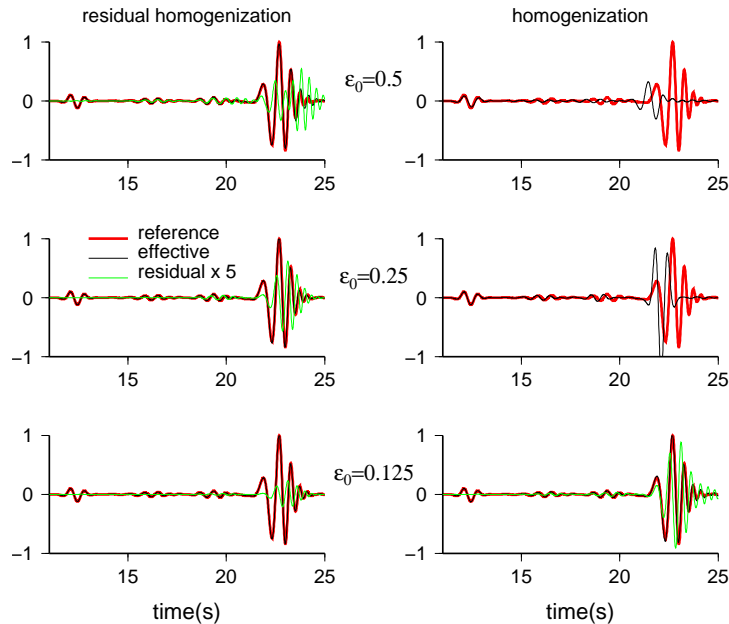


FIGURE 4.5 – Déplacement horizontal pour le récepteur (diamant de la Figure 4.1) situé à la surface libre à 60 km de la source. Le signal est calculé dans le milieu initial comme signal de référence (courbe rouge), dans le milieu effectif calculé par l'homogénéisation usuelle (courbe noire, colonne de droite) et par l'homogénéisation résiduelle (courbe noire, colonne de gauche) pour trois valeurs de ε_0 . Dans chaque cas, la différence (amplifiée d'un facteur 5) entre le signal de référence et la solution calculée dans le milieu homogénéisé correspondant est montrée en vert lorsque cette différence est suffisamment petite.

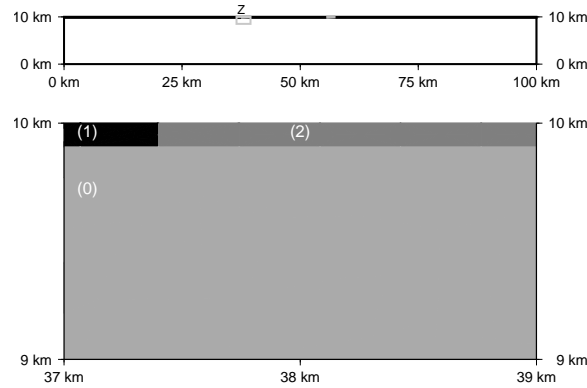


FIGURE 4.6 – Description du milieu de référence de l'homogénéisation résiduelle. Partie supérieure : schéma 2D du milieu de référence. Partie inférieure : zoom correspondant au rectangle (Z) du schéma 2D. Le milieu est constitué des 3 types de matériaux homogènes isotropes différents numérotés (0), (1) et (2) dans la table 4.1.

isante, il convient de réduire (idéalement d'annuler totalement) l'impact de l'homogénéisation dans cette région du domaine, ce qui conduit à une définition naturelle du modèle de référence de l'homogénéisation résiduelle.

Modèle de référence

Le modèle de référence de l'homogénéisation résiduelle est conservé dans le modèle effectif, ce qui signifie qu'il n'est pratiquement pas homogénéisé. Dans notre cas d'étude, le modèle de référence correspond au milieu homogène (0) muni de la couche lente superficielle du milieu initial (Figure 4.1). Dans la couche superficielle, au niveau des jonctions avec les structures inclinées, le modèle de référence est localement défini par les valeurs moyennes (2). L'homogénéisation résiduelle permet alors d'homogénéiser la différence entre le modèle initial et le modèle de référence.

Modèle effectif

De la même manière que pour l'homogénéisation usuelle, le modèle effectif obtenu par l'homogénéisation résiduelle est montré en Figure 4.7. Les structures inclinées sont bien homogénéisées de la même manière que par l'homogénéisation usuelle. En revanche, la couche lente superficielle est conservée et quasiment aucun effet d'homogénéisation (anisotropie) n'est observé à proximité de la surface, ce qui impacte la précision obtenue sur la forme d'ondes pour les ondes de surface.

Précision sur la forme d'ondes

Le fait que le milieu effectif issu de l'homogénéisation résiduelle conserve la discontinuité de la couche superficielle presque sans aucune modification assure que la propagation de l'onde de surface ne subisse quasiment pas d'effet d'approximation. Les seules régions correspondant à une approximation par l'homogénéisation correspondent aux jonctions avec les structures inclinées que les ondes de surface traversent suffisamment

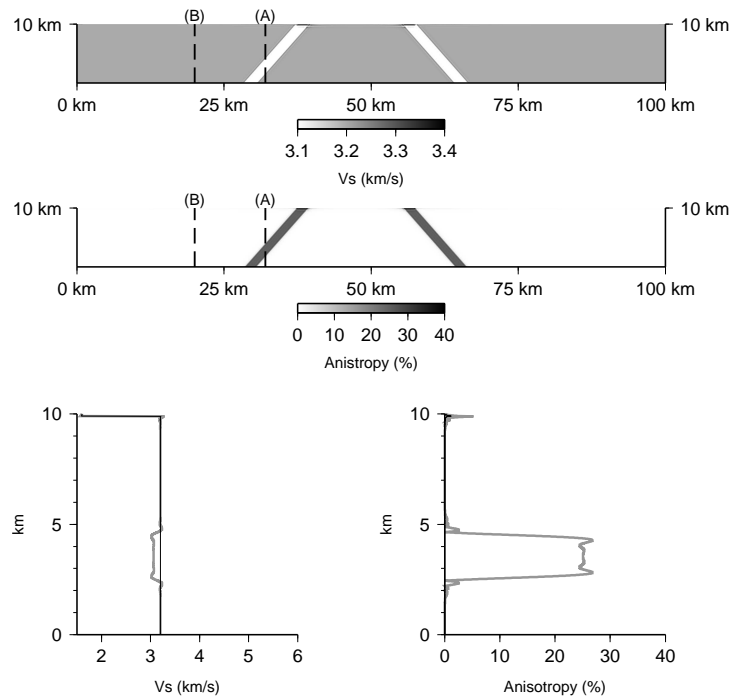


FIGURE 4.7 – Milieu effectif obtenu par l'homogénéisation résiduelle entre le milieu initial (Figure 4.1) et le milieu de référence (Figure 4.6) pour $\varepsilon_0 = 0.5$. Les deux graphes du haut montrent la carte des vitesses V_s d'ondes S pour le modèle isotrope le plus proche du modèle effectif et la carte d'anisotropie effective correspondante (Browaeys et Chevrot 2004). Les deux graphes du bas montrent les coupes verticales pour les vitesses d'ondes S isotropes et l'anisotropie effective correspondante selon les lignes (A) (courbe grise épaisse) et (B) (courbe noire fine) du graphe du haut.

rapidement pour ne pas générer d'erreur visible. En conséquence, même pour $\varepsilon_0 = 0.5$ (Figure 4.4), l'homogénéisation résiduelle (courbe bleue) permet une bonne modélisation des ondes de surface même à grande distance par rapport à la source, contrairement à ce que permettait l'homogénéisation usuelle (courbe rouge). Par ailleurs l'approximation des ondes de volume reste apparemment toujours aussi bonne. L'amplitude de la différence entre le signal de référence et le signal calculé à partir du milieu homogénéisé de la Figure 4.5 montre que l'homogénéisation résiduelle avec $\varepsilon_0 = 0.5$ obtient une précision similaire à celle obtenue par l'homogénéisation usuelle avec $\varepsilon_0 = 0.125$. L'homogénéisation résiduelle permet donc ici une bonne précision plus rapidement que l'homogénéisation usuelle, ce que confirme encore l'étude de la convergence en fonction de ε_0 .

Convergence en ε_0

On étudie les convergences de l'homogénéisation usuelle et résiduelle en calculant l'erreur $E_i(\dot{\mathbf{u}}^{\varepsilon_0})$ (relation 1.167) pour une série de 60 récepteurs situés à la surface libre du domaine à raison d'un récepteur tous les 1 km. La Figure 4.8 montre la courbe de l'erreur moyenne sur ces récepteurs $E(\dot{\mathbf{u}}^{\varepsilon_0})$ (relation 1.168) pour plusieurs valeurs de ε_0 . On retrouve un schéma de convergence avec ε_0 de la procédure d'homogénéisation résiduelle semblable à celui de l'homogénéisation usuelle. Pour les deux homogénéisations on obtient une convergence au minimum en $O(\varepsilon_0)$, conformément à la théorie, cependant on constate que l'on n'a pas de convergence en $O(\varepsilon_0^2)$. Pour obtenir une convergence en $O(\varepsilon_0^2)$ il faudrait utiliser le correcteur d'ordre 1 à la surface libre (Capdeville et Marigo 2008; 2013). Si les profils de convergence sont assez semblables, l'erreur commise par l'homogénéisation résiduelle est ici sensiblement plus faible que celle commise par l'homogénéisation usuelle ce qui signifie que la constante du résidu $O(\varepsilon_0)$ est plus faible pour l'homogénéisation résiduelle. Pour obtenir la même erreur il est donc possible d'utiliser un ε_0 plus grand avec l'homogénéisation résiduelle qu'avec l'homogénéisation usuelle ce qui impacte fortement le coût calcul.

4.2.4 Comparaison des coûts de calcul

Nous dénommerons désormais *maillage effectif résiduel* le maillage effectif obtenu par l'homogénéisation résiduelle, par opposition au *maillage effectif usuel* correspondant au maillage effectif obtenu pour l'homogénéisation usuelle. Le fait de pouvoir utiliser un ε_0 plus grand avec l'homogénéisation résiduelle qu'avec l'homogénéisation usuelle permet de minimiser la contrainte de raffinement du maillage effectif exprimée par la relation 1.165. Cependant, ceci ne s'applique que sur les parties effectivement homogénéisées du domaine et le modèle de référence, reproduit dans le modèle effectif et comportant potentiellement des discontinuités, doit être correctement maillé par le maillage effectif résiduel.

Dans le cas présent, la frontière inférieure de la couche superficielle est une discontinuité que le maillage éléments spectraux doit prendre en compte, ce qui conduit à des éléments de petite taille dans la couche su-

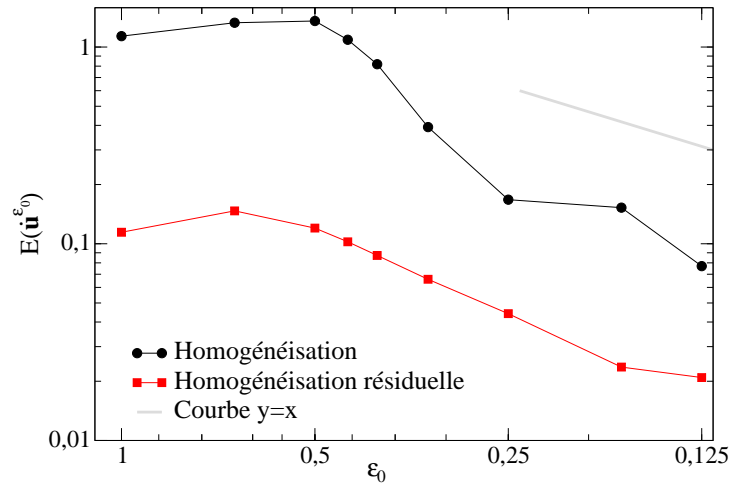


FIGURE 4.8 – Courbes de l'erreur $E(\hat{u}^{\epsilon_0})$ en fonction de ϵ_0 calculées pour l'homogénéisation usuelle (courbe noire) et l'homogénéisation résiduelle (courbe rouge).

perficielle (Figure 4.2, partie inférieure). Pour un même ϵ_0 , les éléments obtenus localement à cette zone pour le maillage effectif usuel seraient de plus grande taille que pour le maillage effectif résiduel. Cependant, pour obtenir une précision similaire, l'homogénéisation usuelle nécessite un plus faible ϵ_0 ce qui impose une plus grande restriction sur la taille des éléments du maillage effectif usuel sur l'ensemble du domaine et non pas seulement localement. Comme nous l'avons déjà évoqué précédemment (Figure 4.5), on considère que l'on obtient une précision semblable sur la forme d'ondes entre l'homogénéisation résiduelle avec $\epsilon_0 = 0.5$ et l'homogénéisation usuelle avec $\epsilon_0 = 0.125$. On utilise à nouveau *Gmsh* pour mailler le modèle de référence et, pour obtenir une comparaison représentative entre les deux méthodes d'homogénéisation on ne modifie pas manuellement le maillage obtenu dans chacun des cas, même s'il paraît ici évident que le maillage effectif résiduel de la Figure 4.2 (partie inférieure) pourrait être optimisé en n'utilisant qu'un seul élément verticalement dans la couche superficielle. Pour référence, le calcul de forme d'ondes par éléments spectraux, avec la même configuration matérielle dans les deux cas, est 40 fois plus rapide dans le maillage effectif de l'homogénéisation résiduelle (Figure 4.2, partie inférieure) que dans le maillage initial (Figure 4.2, partie supérieure). De plus, malgré la nécessité de mailler le modèle de référence, le calcul de forme d'ondes dans le modèle homogénéisé résiduel est 7 fois plus rapide que dans le modèle homogénéisé usuel. On peut noter que le calcul pourrait être 15 fois plus rapide avec un seul élément verticalement dans la couche superficielle du maillage effectif résiduel. Par ailleurs, l'homogénéisation résiduelle a elle-même nécessité environ 3% des ressources nécessaires pour calculer la forme d'ondes de référence.

Cet exemple montre donc que l'homogénéisation résiduelle, grâce au ciblage des zones à homogénéiser, peut offrir un avantage conséquent pour l'optimisation des performances du calcul de forme d'ondes.

4.3 ASSEMBLAGE DE MILIEUX À CONTENUS FRÉQUENTIELS DIFFÉRENTS

4.3.1 Introduction

Le problème que l'on se pose ici est d'assembler correctement (ce terme sera explicité plus loin) deux modèles élastiques définis à des résolutions différentes. Le premier modèle ne contient que des variations lentes, ou basses fréquences, et correspond à un modèle basse résolution tandis que le second contient des variations rapides, ou hautes fréquences, et correspond à un modèle haute résolution. Une telle problématique n'est pas simplement théorique et peut se rencontrer dans des cas pratiques. Par exemple beaucoup de modèles tomographiques de la Terre ne contiennent que la réponse aux basses fréquences du milieu réel. Or il peut s'avérer intéressant de modéliser la dispersion aux hautes fréquences du milieu. Comme le modèle haute résolution nécessaire au calcul du champ d'ondes hautes fréquences n'est en général pas connu et impossible à obtenir par les méthodes de tomographie usuelles, la solution envisagée est d'utiliser une réalisation stochastique du modèle élastique (Imperator et Mai 2013). Une idée consiste alors à ajouter au milieu basse résolution initialement connu, un milieu haute résolution défini à partir d'un processus stochastique. Nous étudions ici un tel processus d'assemblage entre un milieu basse résolution (ρ^L, \mathbf{c}^L) et un milieu haute résolution (ρ^H, \mathbf{c}^H) . Pour être correctement assemblé (ou combiné), le milieu ainsi obtenu (ρ^C, \mathbf{c}^C) doit avoir la même réponse basse fréquences que le milieu basse résolution. Ainsi, pour une source suffisamment basse fréquence, les sismogrammes calculés à partir du modèle assemblé (ρ^C, \mathbf{c}^C) sont identiques à ceux calculés à partir du modèle basse résolution (ρ^L, \mathbf{c}^L) . En termes de milieux effectifs, le modèle élastique (ρ^L, \mathbf{c}^L) doit correspondre à la version homogénéisée de (ρ^C, \mathbf{c}^C) pour la bande de basses fréquences appropriée. Nous commençons par introduire les deux modèles à assembler puis nous décrivons deux méthodes d'assemblage. La première est très immédiate et nous la qualifions ici de *naïve*. La seconde est définie au sens de l'homogénéisation en utilisant l'homogénéisation résiduelle. Enfin nous discuterons des résultats obtenus.

4.3.2 Modèle basse résolution

Nous considérons le modèle basse résolution 2D (ρ^L, \mathbf{c}^L) illustré en Figure 4.9 (a) et (c). Le milieu assemblé devra pouvoir reproduire la réponse de ce milieu basse résolution pour des fréquences d'excitation allant jusqu'à $f_{max}^L = 0.64$ Hz. On peut supposer par exemple que le modèle basse résolution a été obtenu par une inversion de forme d'onde pour laquelle les sismogrammes synthétiques correspondent parfaitement aux données pour des fréquences allant jusqu'à f_{max}^L .

4.3.3 Modèle haute résolution

Pour construire le modèle haute résolution on se base sur une répartition statistique supposée du milieu dont on calcule une réalisation. Le modèle statistique que nous utilisons porte sur le spectre de puissance du

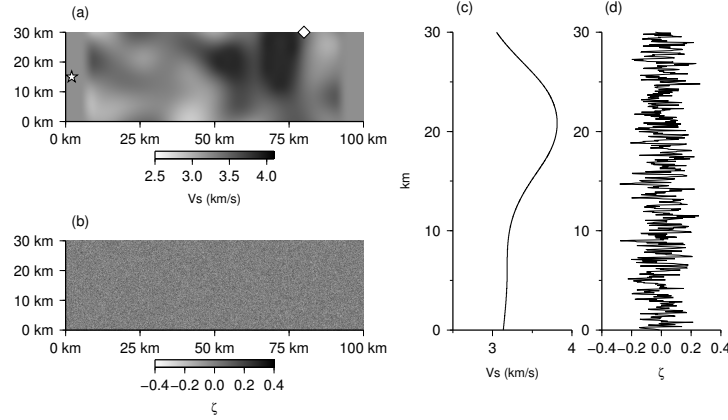


FIGURE 4.9 – Cartes 2D et coupes verticales (en l'abscisse $x = 50$ km) pour les vitesses V_S d'ondes S basse résolution (sous-figures (a) et (c) respectivement) et pour le champ haute résolution ζ (sous-figures (b) et (d) respectivement) basé sur le spectre de Von Karman avec une déviation standard $\sigma = 10\%$, une longueur de corrélation $a = 50$ m et un exposant de Hurst $\nu = 0.3$. En sous-figure (a), l'étoile indique la position de la source, et le diamant la position du récepteur.

milieu haute résolution. On utilise ici la fonction de corrélation à bande limitée de Von Karman qui constitue un modèle statistique couramment utilisé tant en analyse de données (Holliger 1997, Dolan et al. 1998) que pour des simulations numériques (Frankel et Clayton 1986, Hartzell et al. 2010). À 2D, son spectre de puissance est donné par

$$P(k) = \frac{4\pi\sigma^2 a^2 \Gamma(\nu + 1)}{\Gamma(\nu)(1 + k^2 a^2)^{(\nu + 1)}}, \quad (4.26)$$

où k est le nombre d'onde, Γ est la fonction Gamma, σ est la déviation standard, a est la distance de corrélation et ν est l'exposant de Hurst contrôlant la décroissance du spectre de puissance pour des valeurs du nombre d'ondes supérieures au nombre d'onde de coupure, $k > \frac{1}{a}$. Dans cet exemple, on choisit $\sigma = 10\%$, $a = 50$ m, $\nu = 0.3$. Ces valeurs rentrent dans les contraintes connues pour ces paramètres dans la littérature, et permettent d'obtenir une distribution contenant beaucoup de petites échelles. En pratique, on construit les paramètres élastiques haute résolution (ρ^H, \mathbf{c}^H) à partir d'un champ intermédiaire $\zeta(\mathbf{x})$. Ce champ intermédiaire $\zeta(\mathbf{x})$ est construit en trois étapes. On commence par générer une distribution 2D initiale aléatoire comme un bruit blanc que l'on filtre ensuite dans le domaine fréquentiel par la racine carrée du spectre de puissance de Von Karman $P(k)$ (relation 4.26). Finalement, $\zeta(\mathbf{x})$ est la transformée de Fourier inverse du résultat précédent. Le modèle élastique haute résolution (ρ^H, \mathbf{c}^H) est alors défini comme le modèle isotrope correspondant aux paramètres

$$V_P^H(\mathbf{x}) = V_P^0(1 + \zeta(\mathbf{x})), \quad (4.27)$$

$$V_S^H(\mathbf{x}) = V_S^0(1 + \zeta(\mathbf{x})), \text{ et } \quad (4.28)$$

$$\rho^H(\mathbf{x}) = \rho^0(1 + \zeta(\mathbf{x})), \quad (4.29)$$

pour lesquels on choisit $V_P^0 = 5.8$ km/s, $V_S^0 = 3.2$ km/s et $\rho^0 = 3000$ kg/m³. Les deux modèles basse et haute résolution étant définis, on introduit maintenant deux modes d'assemblage de ces modèles.

4.3.4 Assemblage naïf

On veut obtenir un milieu assemblé (ρ^C, \mathbf{c}^C) dont la réponse basse fréquence (pour $f \leq f_{max}^L$) correspond à celle du milieu basse résolution (ρ^L, \mathbf{c}^L) . En champ lointain, on peut supposer que à la fréquence maximale f_{max}^L correspond un nombre d'onde maximal k_{max}^L (ou une longueur d'onde minimale λ_{min}^L). En notant à nouveau $\mathcal{F}_{max}^L(\cdot)$ le filtre passe-bas de nombre d'onde de coupure k_{max}^L , un assemblage naïf consiste à construire les paramètres

$$\mathbf{c}^{Cn}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^L(\mathbf{x}) + \left(\mathbf{I} - \mathcal{F}_{max}^L \right) (\mathbf{c}^H)(\mathbf{x}) \text{ et} \quad (4.30)$$

$$\rho^{Cn}(\mathbf{x}) = \rho^L(\mathbf{x}) + \left(\mathbf{I} - \mathcal{F}_{max}^L \right) (\rho^H)(\mathbf{x}). \quad (4.31)$$

où l'opérateur $\mathbf{I} - \mathcal{F}_{max}^L(\cdot)$ agit comme un filtre passe-haut, les nombres d'ondes plus petits que k_{max}^L étant décimés, et où les paramètres élastiques sont indexés par "Cn" pour Combinaison naïve. Le modèle ainsi obtenu ne contient aucune contribution des basses fréquences spatiales du modèle haute résolution, celles-ci ne provenant alors que du modèle basse résolution. En revanche qu'en sera-t'il de la réponse basse fréquence de ce milieu? Cette construction revient *a priori* à considérer que la réponse basse fréquence ($f \leq f_{max}^L$) d'un modèle élastique n'est due qu'à la partie basse fréquence de ce modèle ($k \leq k_{max}^L$), ce qui est directement contraire aux résultats de l'homogénéisation. Pour obtenir un assemblage *a priori* plus conforme aux résultats de l'homogénéisation nous allons maintenant nous baser sur la méthode de l'homogénéisation résiduelle.

4.3.5 Assemblage au sens de l'homogénéisation

Pour obtenir un modèle assemblé dont la réponse basse fréquence soit identique à celle du modèle basse résolution, il faut l'assembler au sens de l'homogénéisation, c'est-à-dire en respectant le problème de cellule (1.135-1.138). Comme pour la construction de l'homogénéisation résiduelle, il est donc nécessaire d'intervenir non pas directement sur le tenseur élastique mais sur les concentrateurs \mathbf{G} et \mathbf{H} . Plus précisément, on résout le problème de cellule (1.135-1.138) deux fois, une fois pour le modèle basse résolution (ρ^L, \mathbf{c}^L) et une fois pour le modèle haute résolution (ρ^H, \mathbf{c}^H) afin d'obtenir les concentrateurs initiaux $(\mathbf{G}_s^L, \mathbf{H}_s^L)$ et $(\mathbf{G}_s^H, \mathbf{H}_s^H)$ respectivement. On assemble alors les concentrateurs selon

$$\mathbf{G}_s^C(\mathbf{x}) = \mathbf{G}_s^L(\mathbf{x}) + \left(\mathbf{I} - \mathcal{F}_{max}^L \right) (\mathbf{G}_s^H)(\mathbf{x}) \text{ et} \quad (4.32)$$

$$\mathbf{H}_s^C(\mathbf{x}) = \mathbf{H}_s^L(\mathbf{x}) + \left(\mathbf{I} - \mathcal{F}_{max}^L \right) (\mathbf{H}_s^H)(\mathbf{x}). \quad (4.33)$$

Le modèle élastique assemblé $(\rho^{Ch}, \mathbf{c}^{Ch})$, indexé par *Ch* pour Combinaison au sens de l'Homogénéisation, est alors obtenu par

$$\mathbf{c}^{Ch}(\mathbf{x}) = \mathbf{H}_s^C : \left(\mathbf{G}_s^C \right)^{-1}(\mathbf{x}) \text{ et} \quad (4.34)$$

$$\rho^{Ch}(\mathbf{x}) = \rho^L(\mathbf{x}) + \left(\mathbf{I} - \mathcal{F}_{max}^L \right) (\rho^H)(\mathbf{x}). \quad (4.35)$$

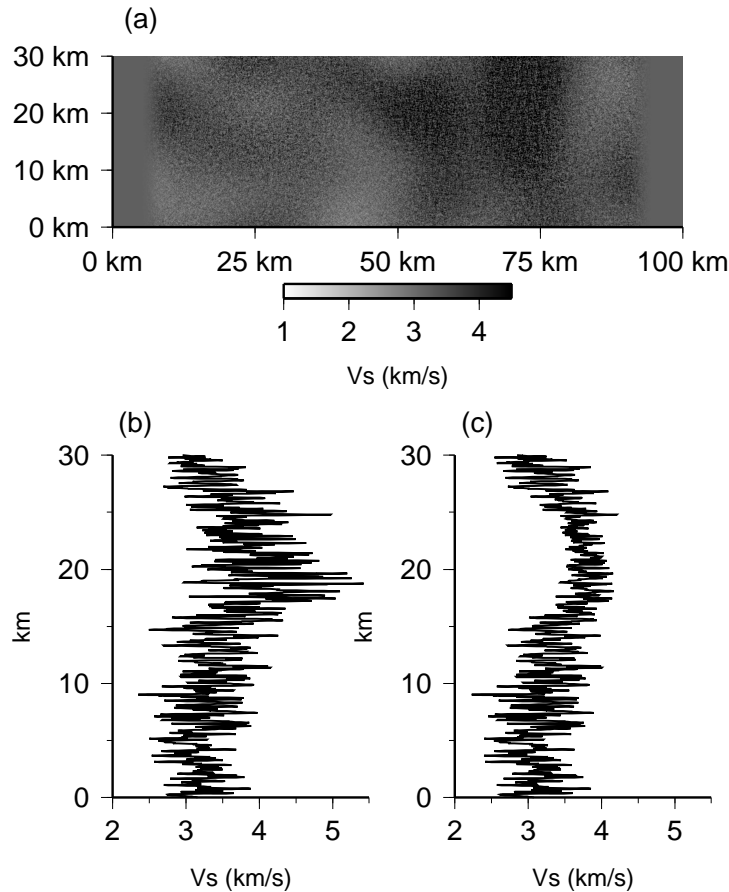


FIGURE 4.10 – Carte des vitesses d’ondes S obtenues par assemblage des modèles au sens de l’homogénéisation (a) et coupes verticales (abscisse $x = 50$ km) pour l’assemblage au sens de l’homogénéisation (b) et pour l’assemblage naïf (c).

On montre en Figure 4.10 la carte 2D des vitesses d’ondes S obtenue pour le modèle assemblé au sens de l’homogénéisation (a) et des coupes verticales pour le modèle obtenu par assemblage au sens de l’homogénéisation (b) et par assemblage naïf (c). Ces deux coupes montrent effectivement des points communs, notamment le respect de la variation large échelle du milieu basse résolution. En revanche le contenu hautes fréquences est clairement différent, les amplitudes par exemple étant différentes sur la zone autour de 20 km de profondeur. On compare alors les réponses des deux modèles assemblés à celle du modèle basse résolution dans le cas d’une source basse fréquence (Figure 4.11), puis dans le cas d’une source haute fréquence (Figure 4.12).

4.3.6 Sismogrammes basses fréquences

On voit clairement en Figure 4.11 que la réponse basse fréquence du modèle assemblé naïvement (ρ^{Cn}, c^{Cn}) ne correspond plus à celle du modèle basse résolution initial (ρ^L, c^L). En effet l’onde incidente est déphasée et la forme de la coda n’est pas respectée. Cette construction, qui respecte pourtant le spectre spatial basse fréquence des paramètres élastiques basse résolution, ne respecte cependant pas sa réponse basse fréquence. Ceci correspond au principe fondamental de l’homogénéisation, c’est-à-dire que les hautes fréquences spatiales (petites échelles)

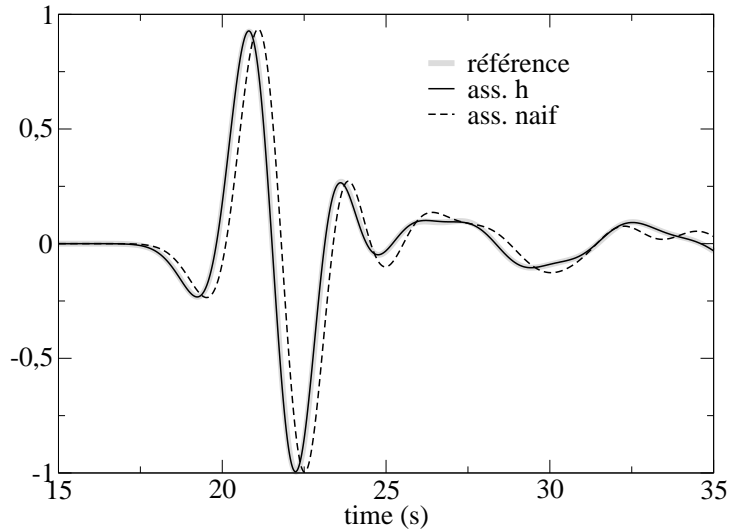


FIGURE 4.11 – Tir basse fréquence : composante verticale du déplacement enregistrée à la surface libre à 80 km de la source et calculée dans le milieu basse résolution (courbe grise), dans le milieu assemblé au sens de l’homogénéisation (courbe noire) et dans le milieu assemblé naïvement (courbe pointillée).

des paramètres élastiques ont un effet global sur les ondes à grande longueur d’ondes (basse fréquence). En termes d’homogénéisation on n’a pas $(\rho^{Cn,*}, c^{Cn,*}) = (\rho^L, c^L)$, où $(\rho^{Cn,*}, c^{Cn,*})$ correspondrait au modèle homogénéisé à l’échelle de k_{max}^L du modèle (ρ^{Cn}, c^{Cn}) .

En revanche, le modèle assemblé au sens de l’homogénéisation restitue correctement la réponse basse fréquence du modèle basse résolution (ρ^L, c^L) pour chaque phase du signal, ce qui implique que la méthode de l’homogénéisation résiduelle permet effectivement d’assembler un modèle élastique basse résolution et un modèle élastique haute résolution tout en respectant la réponse basse fréquence du modèle basse résolution.

4.3.7 Sismogrammes hautes fréquences

Si les réponses des deux modèles assemblés sont différentes pour une source basse fréquence, on peut s’interroger sur la ressemblance de leur réponse à une sollicitation haute fréquence. On reprend alors la configuration précédente avec une source de fréquence de coin $f_{max} \simeq 11.5$ Hz. La Figure 4.12 montre alors à nouveau la composante verticale du déplacement pour le modèle basse résolution, le modèle assemblé naïvement et le modèle assemblé au sens de l’homogénéisation. La réponse du modèle basse résolution montre une seule arrivée, le signal direct, et pas de coda car le milieu est maintenant trop lisse pour les ondes pour générer de la diffraction. En revanche, les réponses des deux milieux assemblés montrent une forte coda et aucune correspondance (même pas pour la première arrivée) entre les signaux. Ces deux modes d’assemblage s’avèrent donc très différents quelle que soit la bande de fréquence considérée.

4.3.8 Conclusion

Cette expérience montre, tout d’abord, que le procédé d’homogénéisation ne se réduit pas à un simple filtrage. Si cela avait été le cas, le

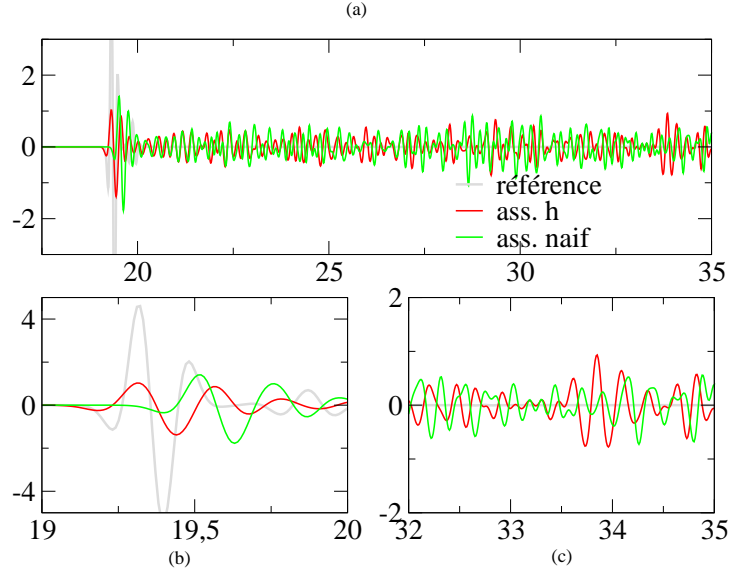


FIGURE 4.12 – Tir haute fréquence : composante verticale du déplacement (sismogrammes complets (a) et zooms (b) et (c)) enregistrée à la surface libre à 80 km de la source et calculée dans le milieu basse résolution (courbe grise), dans le milieu assemblé au sens de l'homogénéisation (courbe rouge) et dans le milieu assemblé naïvement (courbe verte).

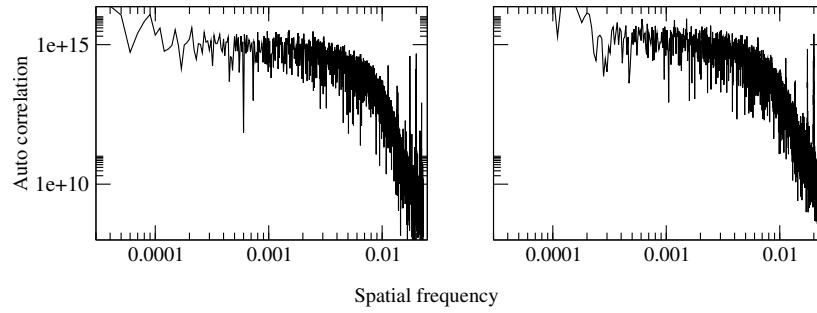


FIGURE 4.13 – Fonction d'autocorrelation (spectre) pour le paramètre élastique c_{1111} (x) obtenu par le mode d'assemblage naïf (gauche) et le mode d'assemblage au sens de l'homogénéisation (droite).

mode d'assemblage naïf aurait suffi à obtenir un modèle conservant une réponse basse fréquence correspondant à celle du modèle basse résolution. Le problème d'une telle construction est alors résolu par la méthode d'homogénéisation résiduelle qui propose véritable un mode d'assemblage au sens de l'homogénéisation. Cette méthode pose alors de nouvelles questions sur la manière de combiner différents modèles élastiques. En regardant les fonctions d'auto-correlations pour le coefficient élastique c_{1111} pour les deux modes d'assemblages (Figure 4.13), on constate que malgré quelques différences, ils restent très similaires. Cela signifie-t-il alors que le mode de combinaison des modèles élastiques n'impacte pas sensiblement les spectres de puissances des modèles élastiques ainsi construits ? Et quelles informations peut encore apporter la méthode d'homogénéisation résiduelle dans l'étude de l'assemblage de modèles stochastiques ?

CONCLUSION

L'homogénéisation résiduelle constitue une généralisation de la méthode d'homogénéisation déterministe non périodique qui permet d'homogénéiser seulement la différence entre le modèle réel ou initial et un modèle de référence défini par l'utilisateur. Une telle extension peut s'avérer utile pour n'homogénéiser que certaines parties bien ciblées du modèle élastique initial, et permet en particulier de conserver certaines parties du modèle initial comme par exemple des discontinuités. Si le mode de convergence en ε_0 n'est pas affectée par les modifications de la méthode, l'erreur commise à ε_0 égal peut s'avérer considérablement réduite ce qui est un avantage majeur. L'homogénéisation résiduelle permet aussi d'assembler des milieux de contenus fréquentiels différents tout en respectant la réponse basse fréquence du milieu original de plus basse résolution. Enfin, l'homogénéisation résiduelle pourrait apporter un nouveau regard dans le domaine de l'inversion de forme d'ondes en poursuivant l'étude initiée dans le cas lamellé par Capdeville et al. (2013). En effet, le postulat, à confirmer ou infirmer, est que pour une inversion de forme d'ondes basée sur des données sismiques dans une bande finie de fréquences, le modèle obtenu par l'inversion n'est autre que le modèle effectif issu de l'homogénéisation résiduelle entre le milieu réel et le milieu de référence utilisé par la méthode d'inversion.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Au cours de ce travail de thèse nous avons développé des extensions de la méthode d'homogénéisation selon trois volets :

- l'homogénéisation des ondes acoustiques,
- l'homogénéisation à filtrage variable,
- l'homogénéisation résiduelle.

Chacun de ces développements a permis d'apporter ou de mettre en lumière des nouvelles pistes pour des optimisations techniques et/ou une meilleure interprétation de la propagation des ondes dans les milieux complexes.

Premièrement, le développement de l'homogénéisation des ondes acoustiques a mis en lumière de nouveaux aspects de la difficulté d'approximer les ondes P élastiques par des ondes acoustiques en milieux hétérogènes. En effet, non seulement les amplitudes des signaux ne peuvent physiquement pas être respectés, mais dans le cas de milieux rugueux, une erreur de phase apparaît, due aux différences fondamentales de nature entre l'anisotropie effective élastique et l'anisotropie effective acoustique. La création d'une densité effective anisotrope, à anisotropie elliptique, constitue sans doute le résultat majeur de cette étude. Enfin la forte dépendance des paramètres acoustiques effectifs à la densité de masse vient suggérer que ce paramètre ne doit pas être négligé dans l'utilisation d'approximations acoustiques des ondes P élastiques dans le cadre de tests théoriques. Une perspective de travail serait d'alors d'étudier les possibilités d'adaptation de la méthode d'homogénéisation déterministe non périodique aux milieux biphasés solides-fluides non poreux. Cela permettrait en particulier de pouvoir mieux comprendre la propagation des ondes dans les milieux composés de roches contenant des micro-inclusions fluides aléatoirement réparties.

Deuxièmement, le développement d'une procédure d'homogénéisation à filtre variable visant à prendre en compte une variabilité large échelle de la longueur d'onde dominante du champ d'ondes a permis de cerner les difficultés inhérentes au problème. L'utilisation d'une transformation géométrique visant à déformer l'ondelette de filtrage utilisée s'est avérée théoriquement possible, mais difficile à mettre en place en pratique, en particulier à 2D. Si l'on a effectivement obtenu de meilleurs résultats avec la méthode par profils 1D, la définition du profil large échelle (1D ou 2D) permettant une bonne adaptation du filtrage reste une étape délicate et difficilement automatisable. Enfin, l'augmentation du temps de calcul de la procédure d'homogénéisation adaptative (particulièrement à 2D) ne se justifie pas systématiquement par le gain obtenu. L'obtention d'un filtrage adaptatif pour l'homogénéisation se ferait donc sans doute de manière bien plus naturelle et efficace par une procédure d'homogénéisation modale, chaque mode comprenant localement l'informa-

tion fréquentielle du milieu local, ce qui constitue la perspective majeure de cette partie.

Enfin, nous avons montré la validité ainsi que quelques possibilités de l'homogénéisation résiduelle à 2D (l'homogénéisation résiduelle avait déjà été introduite sur les milieux lamellés). Cette procédure, qui permet de n'homogénéiser qu'une différence entre deux modèles élastiques, le modèle initial réel et le modèle de référence, permet alors de cibler les zones du modèles à homogénéiser et celles à conserver dans le modèle effectif, apportant une souplesse supplémentaire à la procédure d'homogénéisation. Le modèle effectif peut alors conserver de fortes hétérogénéités comme des interfaces par exemple. Dans certains cas, un choix judicieux du modèle de référence permet de réduire sensiblement le temps de calcul de la forme d'ondes dans le modèle obtenu. La méthode d'homogénéisation résiduelle apporte de plus un nouveau regard sur la construction de modèles élastiques par assemblage de modèles basse résolution avec des modèles haute résolution, par exemple de type stochastique. En effet, elle permet d'effectuer un tel assemblage en respectant la réponse basse fréquence du modèle basse résolution.

Enfin, la perspective la plus intéressante liée à l'homogénéisation résiduelle (2D et 3D) consiste probablement dans la relation potentielle entre milieu effectif résiduel et modèle d'inversion par forme d'ondes dont l'étude a été amorcée par la première introduction de l'homogénéisation résiduelle sur les milieux lamellés (Capdeville et al. 2013). Cette étude 1D faisait en effet le lien entre le modèle obtenu par une inversion de forme d'ondes et l'homogénéisation résiduelle entre le modèle réel et le modèle de référence utilisé par la procédure d'inversion.

BIBLIOGRAPHIE

- Alkhalifah Tariq. Acoustic approximations for processing in transversely isotropic media. *Geophysics*, 63 :623–631, 1998. (Cité pages 46 et 58.)
- Alkhalifah Tariq. An acoustic wave equation for anisotropic media. *Geophysics*, 65 :1239–1250, 2000. (Cité pages 46 et 58.)
- Alkhalifah Tariq. An acoustic wave equation for orthorhombic anisotropy. *Geophysics*, 68 :1169–1172, 2003. (Cité page 58.)
- Allaire Grégoire. Homogenization and two-scale convergence. *SIAM J. Math. Anal.*, 23 :1482—1518, 1992. (Cité pages 22 et 68.)
- Auriault J.-L. et Sanchez-Palencia E. Étude du comportement macroscopique d'un milieu poreux saturé déformable. *J. Mécanique*, 16(4) : 575–603, 1977. (Cité page 68.)
- Backus George. Long-wave elastic anisotropy produced by horizontal layering. *Journal of Geophysical Research*, 67(11) :4427–4440, 1962. (Cité pages 3, 25, 28, 68, 71, 72 et 73.)
- Bakker Peter M. et Duveneck Eric. Stability analysis for acoustic wave propagation in tilted media by finite differences. *Geophysical Journal International*, 185 :911–921, 2011. (Cité page 58.)
- Barnes Christophe et Charara Marwan. Full-waveform inversion results when using acoustic approximation instead of elastic medium. Dans *SEG annual meeting, Las Vegas, USA*, pages 1895–1899, 2008. (Cité page 58.)
- Bekhterev PV. Analytical study of generalized hooke's law. the use of the method of coordinate transformation. *Zh. Rus. Fiz.-Khim. Obshch. Leningrad. Univ.*, 58 :415–446, 1926. (Cité page 12.)
- Ben-Hadj-Ali Hamed, Operto Stéphane, et Virieux Jean. Velocity model building by 3d frequency-domain, full-waveform inversion of wide-aperture seismic data. *Geophysics*, 73(5) :VE101–VE117, 2008. (Cité page 57.)
- Bensoussan A., Lions J.-L., et Papanicolaou G. *Asymptotic Analysis of Periodic Structures*. North Holland, 1978. (Cité pages 3, 22, 30 et 68.)
- Berkhout Augustinus Johannes. *Seismic Migration : Imaging of Acoustic Energy by Wave Field Extrapolation*. Elsevier, 1984. (Cité page 57.)
- Bernardi Christine et Maday Yvon. *Approximations spectrales de problèmes aux limites elliptiques*. Springer-Verlag, 1992. (Cité pages 3 et 15.)

- Bosse Marie-pascale et R.E. Showalter. Homogenization of the layered medium equation. *Applicable Analysis*, 32(3-4) :183–202, 1989. (Cité page 73.)
- Browaeys Jules Thomas et Chevrot Sébastien. Decomposition of the elastic tensor and geophysical applications. *Geophysical Journal International*, 159 :667–678, 2004. (Cité pages 128, 129, 130 et 133.)
- Bube Kenneth P., Nemeth Tamas, Stefani Joseph P., Ergas Ray, Liu Wei, Nihel Kurt T., et Zhang Linbin. On the instability in second-order systems for acoustic vti and tti media. *Geophysics*, 77 :T171–T186, 2012. (Cité page 58.)
- Bunks Carey, Saleck Fatimetou M, Zaleski S, et Chavent G. Multiscale seismic waveform inversion. *Geophysics*, 60(5) :1457–1473, 1995. (Cité page 57.)
- Capdeville Y. et Marigo J. J. Second order homogenization of the elastic wave equation for non-periodic layered media. *Geophysical Journal International*, 170 :823–838, 2007. (Cité page 128.)
- Capdeville Y. et Marigo J. J. Shallow layer correction for spectral element like methods. *Geophysical Journal International*, 172 :1135–1150, 2008. (Cité pages 128 et 134.)
- Capdeville Yann, Guillot Laurent, et Marigo Jean-Jacques. 1-d non periodic homogenization for the wave equation. *Geophysical Journal International*, 181 :897–910, 2010a. (Cité pages 3, 30, 46, 68 et 71.)
- Capdeville Yann, Guillot Laurent, et Marigo Jean-Jacques. 2-d non-periodic homogenization to upscale elastic media for p-sv waves. *Geophysical Journal International*, 2010b. (Cité pages 3, 24, 30, 32, 40, 41, 42, 46, 52, 68, 71, 80, 87 et 122.)
- Capdeville Yann et Marigo Jean-Jacques. A non-periodic two scale asymptotic method to take account of rough topographies for 2-D elastic wave propagation. *Geophysical Journal International*, 192(1) :163–189, 2013. (Cité pages 128 et 134.)
- Capdeville Yann, Stutzmann Éléonore, Wang Nian, et Montagner Jean-Paul. Residual homogenization for seismic forward and inverse problems in layered media. *Geophysical Journal International*, 194(1) :470–487, 2013. (Cité pages 4, 110, 121, 142 et 144.)
- Chu Chunlei, Macy Brian K., et Anno Phil D. Pure acoustic wave propagation in transversely isotropic media by the pseudospectral method. *Geophysical Prospecting*, pages 1–12, 2012. (Cité page 58.)
- Cowin Stephen C et Mehrabadi Morteza M. On the identification of material symmetry for anisotropic elastic materials. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 40(4) :451–476, 1987. (Cité page 12.)
- Cummer Steven A et Schurig David. One path to acoustic cloaking. *New Journal of Physics*, 9(3) :45, 2007. (Cité pages 45, 49 et 72.)

- de Hoop AT. Handbook of radiation and scattering of waves, 1995, 1995. (Cité pages 45, 49 et 72.)
- Dolan Sean S, Bean Christopher J, et Riollot Bruno. The broad-band fractal nature of heterogeneity in the upper crust from petrophysical logs. *Geophysical Journal International*, 132(3) :489–507, 1998. (Cité page 137.)
- Dziewonski Adam M. et Anderson Don L. Preliminary reference earth model. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 25 :297–356, 1981. (Cité page 97.)
- Etgen John, Gray Samuel H, et Zhang Yu. An overview of depth imaging in exploration geophysics. *Geophysics*, 74(6) :WCA5–WCA17, 2009. (Cité pages 46 et 57.)
- Fehler Mike et Larner Ken. Seg advanced modeling (seam) : Phase i first year update. *The Leading Edge*, 27(8) :1006–1007, 2008. (Cité pages 60, 61 et 92.)
- Festa Gaetano et Vilotte Jean-Pierre. The newmark scheme as velocity-stress time staggering : an efficient implementation for spectral element simulations of elastodynamics. *Geophysical Journal International*, 161 : 789–812, 2005. (Cité pages 21 et 63.)
- Fletcher Robin, Du Xiang, et Fowler Paul J. A new pseudo-acoustic wave equation for ti media. Dans *SEG annual meeting, Las Vegas, USA*, pages 2082–2086, 2008. (Cité page 58.)
- François Marc Louis Maurice. *Identification des symétries matérielles de matériaux anisotropes*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, 1995. (Cité page 12.)
- Frankel Arthur et Clayton Robert W. Finite difference simulations of seismic scattering : Implications for the propagation of short-period seismic waves in the crust and models of crustal heterogeneity. *Journal of Geophysical Research*, 91(B6) :6465–6489, 1986. (Cité page 137.)
- Gauthier Odile, Virieux Jean, et Tarantola Albert. Two-dimensional non-linear inversion of seismic waveforms : Numerical results. *Geophysics*, 51(7) :1387–1403, 1986. (Cité page 57.)
- Germain P. et Muller P. *Introduction à la mécanique des milieux continus (2nd ed.)*. Masson, Paris, 1994. (Cité page 10.)
- Geuzaine C. et Remacle J.-F. Gmsh : a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *Int. J. Num. Methods in Engrg.*, 79 :1309–1331, 2009. (Cité pages 128 et 129.)
- Grechka Vladimir, Zhang Linbin, et Rector III James W. Shear waves in acoustic anisotropic media. *Geophysics*, 69 :576–582, 2004. (Cité page 58.)
- Guillot Laurent, Capdeville Yann, et Marigo Jean-Jacques. 2-d non periodic homogenization for the sh wave equation. *Geophysical Journal International*, 182 :1438–1454, 2010. (Cité pages 3, 46, 68, 71, 80 et 87.)

- Hartzell Stephen, Harmsen Stephen, et Frankel Arthur. Effects of 3d random correlated velocity perturbations on predicted ground motions. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 100(4) :1415–1426, 2010. (Cité page 137.)
- Hobro James WD, Chapman Chris H, et Robertsson Johan OA. A method for correcting acoustic finite-difference amplitudes for elastic effects. *Geophysics*, 79(4) :T243–T255, 2014. (Cité page 58.)
- Holliger K. Seismic scattering in the upper crystalline crust based on evidence from sonic logs. *Geophysical Journal International*, 128(1) :65–72, 1997. (Cité page 137.)
- Hornung Ulrich. Applications of the homogenization method to flow and transport in porous media. *Summer School on Flow and Transport in Porous Media*, pages 167–222, 1992. (Cité pages 45 et 73.)
- Hornung Ulrich. *Homogenization and porous media*, volume 6. Springer, 1997. (Cité page 45.)
- Hugues T J R. *The finite element method, linear static and dynamic finite element analysis*. Prentice-Hall, 1987. (Cité pages 20 et 21.)
- Imperator W et Mai PM. Broad-band near-field ground motion simulations in 3-dimensional scattering media. *Geophysical Journal International*, 192(2) :725–744, 2013. (Cité page 136.)
- Komatitsch Dimitri. *Méthodes spectrales et éléments spectraux pour l'équation de l'élastodynamique 2D et 3D en milieu hétérogène (Spectral and spectral-element methods for the 2D and 3D elastodynamics equations in heterogeneous media)*. PhD thesis, Institut de Physique de Globe, 1997. (Cité pages 3 et 15.)
- Komatitsch Dimitri et Tromp Jeroen. Introduction to the spectral-element method for 3-d seismic wave propagation. *Geophysical Journal International*, 139 :806–822, 1999. (Cité page 15.)
- Komatitsch D[imitri] et Tromp J[eroen]. Spectral-element simulations of global seismic wave propagation, part ii : 3-d models, oceans, rotation and gravity. *Geophysical Journal International*, 150(1) :303–318, 2002. (Cité page 63.)
- Komatitsch Dimitri et Tromp Jeroen. A perfectly matched layer absorbing boundary condition for the second-order seismic wave equation. *Geophysical Journal International*, 154 :146–153, 2003. (Cité page 21.)
- Komatitsch Dimitri et Vilotte Jean-Pierre. The spectral element method : an effective tool to simulate the seismic response of 2d and 3d geological structures. *Bulletin of the seismologic Society of America*, 88 :368–392, 1998. (Cité pages 15 et 63.)
- Lamé Gabriel. *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*. Gauthier-Villars, 1852. (Cité pages 58 et 101.)
- Landau LD et Lifshitz EM. Fluid mechanics, 1959. *Course of Theoretical Physics*, 1959a. (Cité page 59.)

- Landau Lev Davidovich et Lifshitz Eugin M. *Course of Theoretical Physics Vol 7 : Theory and Elasticity*. Pergamon Press, 1959b. (Cité page 59.)
- Lurie K. A. et Cherkaev A. V. Exact estimates of the conductivity of a binary mixture of isotropic materials. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh : Section A Mathematics*, 104 :21–38, 1 1986. ISSN 1473-7124. URL http://journals.cambridge.org/article_S0308210500019041. (Cité page 73.)
- Martin G. S. The marmousi2 model, elastic synthetic data, and an analysis of imaging and AVO in a structurally complex environment. Master's thesis, University of Houston, 2004. (Cité page 24.)
- Martin Gary S., Wiley R., et Marfurt K. J. Marmousi2 : An elastic upgrade for Marmousi. *The Leading Edge*, 25 :156–166, 2006. (Cité page 24.)
- Métivier L., Brossier R., Virieux J., et Operto S. Full waveform inversion and the truncated newton method. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 35 :B401–B437, 2013. (Cité pages 57 et 77.)
- Operto Stéphane, Virieux Jean, Ribodetti A., et Anderson J.E. Finite-difference frequency-domain modeling of viscoacoustic wave propagation in 2d tilted transversely isotropic (TTI) media. *Geophysics*, 74 :T75–T95, 2009. (Cité page 58.)
- Papanicolaou G.C. et Varadhan S. Boundary value problems with rapidly oscillating random coefficients. Dans *Conference on Random Fields, Esztergom, Hungary*, pages 835–873, 1979. (Cité pages 22 et 36.)
- Patera . A spectral element method for fluid dynamics : laminar flow in a channel expansion. *Journal of Computational Physics*, 54 :468–488, 1984. (Cité page 15.)
- Plessix René-Edouard, Baeten Guido, de Maag Jan Willem, Klaassen Marinus, Rujie Zhang, Zhifei Tao, et others . Application of acoustic full waveform inversion to a low-frequency large-offset land data set. Dans *2010 SEG Annual Meeting*. Society of Exploration Geophysicists, 2010. (Cité page 57.)
- Pratt R Gerhard, Shin Changsoo, et Hick GJ. Gauss–newton and full newton methods in frequency–space seismic waveform inversion. *Geophysical Journal International*, 133(2) :341–362, 1998. (Cité page 57.)
- Rayleigh Lord John William Strutt. On waves propagated along the plane surface of an elastic solid. *London Mathematical Society*, 17 :4–11, 1887. (Cité page 14.)
- Sanchez-Palencia Enrique. *Non homogeneous media and vibration theory*. Springer, Berlin, 1980. (Cité pages 3, 22, 30, 31, 49 et 68.)
- Schiemanz Alan et Igel Heiner. Accelerated 3-D full-waveform inversion using simultaneously encoded sources in the time domain : application to Valhall ocean-bottom cable data. *Geophysical Journal International*, 2013. (Cité page 57.)

- Schoenberg Michael. Wave propagation in alternating solid and fluid layers. *Wave motion*, 6(3) :303–320, 1984. (Cité pages 45, 49 et 72.)
- Shin Changsoo et Cha Young Ho. Waveform inversion in the laplace domain. *Geophysical Journal International*, 173(3) :922–931, 2008. (Cité page 57.)
- Simo J.C., Tarnow N., et Wong K.K. Exact energy-momentum conserving algorithms and symplectic schemes for nonlinear dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 100 :63–116, 1992. (Cité page 21.)
- Tarantola Albert. Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation. *Geophysics*, 49(8) :1259–1266, 1984. (Cité page 57.)
- Thomsen Leon. Weak elastic anisotropy. *Geophysics*, 51 :1954–1966, 1986. (Cité pages 74 et 85.)
- Torrent Daniel et Sánchez-Dehesa José. Anisotropic mass density by two-dimensional acoustic metamaterials. *New Journal of Physics*, 10, 2008. (Cité pages 45, 49 et 72.)
- Vigh Denes, Starr Bill, Kapoor Jerry, Li Hongyan, et others . 3d full waveform inversion on a gulf of mexico waz data set. Dans *2010 SEG Annual Meeting*. Society of Exploration Geophysicists, 2010. (Cité page 57.)
- Virieux Jean et Operto Stéphane. An overview of full-waveform inversion in exploration geophysics. *Geophysics*, 74 :WCC1–WCC26, 2009. (Cité pages 46 et 57.)
- Wu Zedong et Alkhalifah Tariq. The optimized expansion based low-rank method for wavefield extrapolation. *Geophysics*, 79(2) :T51–T60, 2014. (Cité page 58.)

Titre Outils pour l'homogénéisation des ondes élastiques et acoustiques

Résumé La propagation des ondes élastiques est un phénomène physique complexe dont la modélisation dans les milieux hétérogènes nécessite l'utilisation de solveurs numériques adaptés. Lorsque la longueur d'onde minimale du champ d'onde est grande devant les variations des propriétés élastiques du milieu de propagation, le coût calcul devient disproportionné. Dans ce cadre, la méthode d'homogénéisation permet de simplifier le milieu de propagation tout en contrôlant l'erreur commise sur les solutions calculées par le solveur. De plus, cette méthode permet de mieux comprendre physiquement l'effet des petites hétérogénéités sur les champs d'onde. L'objectif de cette thèse est de développer des extensions de la méthode d'homogénéisation visant à améliorer tant l'efficacité du calcul numérique que notre compréhension de la propagation des ondes en milieux complexes. Au premier chapitre nous rappelons les principes de la méthode des éléments spectraux, servant ici de solveur numérique pour l'équation des ondes, ainsi que ceux de la méthode d'homogénéisation déterministe pour les milieux non périodiques. Dans le second chapitre, nous développons l'homogénéisation pour les milieux purement acoustiques que nous utilisons ensuite pour interpréter les différences entre la propagation des ondes P élastiques et celle des ondes acoustiques. Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons à une optimisation de l'homogénéisation lorsque la longueur d'onde dominante varie fortement spatialement. Enfin, dans le quatrième chapitre, nous exposons une extension permettant d'homogénéiser la différence entre deux modèles élastiques, l'homogénéisation résiduelle, et deux de ses applications.

Mots-clés homogénéisation, hétérogénéités, longueur d'onde, effectif, acoustique, filtrage, résiduel, référence

Title Several tools for elastic and acoustic waves homogenization

Abstract Elastic wave propagation is a complex physical phenomenon whose modelling in heterogeneous media requires well adapted numerical solvers. However, when the wavefield's minimum wavelength is large toward the variations of the medium's elastic properties, the numerical cost may become too important. In this case, homogenization techniques allow to compute a simpler effective medium in which computing the full waveform is much less expensive with very little and controlled precision loss. Moreover, homogenization techniques allow to understand physically better the effects of small heterogeneities on the wavefield. The objective of the present work is to develop extensions of the deterministic non periodic homogenization method allowing to improve both the numerical efficiency in modelling the wavefield and our understanding of wave propagation in complex media. In a first section, we present the basics of both the spectral element method as our numerical solver for the wave equations, and the deterministic homogenization method for non periodic media. In the second section, we derive the homogenization method for acoustic waves and use it to understand the differences between elastic P-wave propagation and acoustic wave propagation. In the third section, we develop an optimization of the homogenization method in the case of strong spatial variations for the main wavefield's wavelength. In the last section, we present a variant allowing to homogenize the difference between two models, the residual homogenization, and two of its applications.

Keywords homogenization, heterogeneities, wavelength, effective, acoustic, adaptive filter, residual, reference model